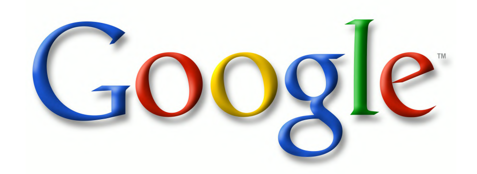
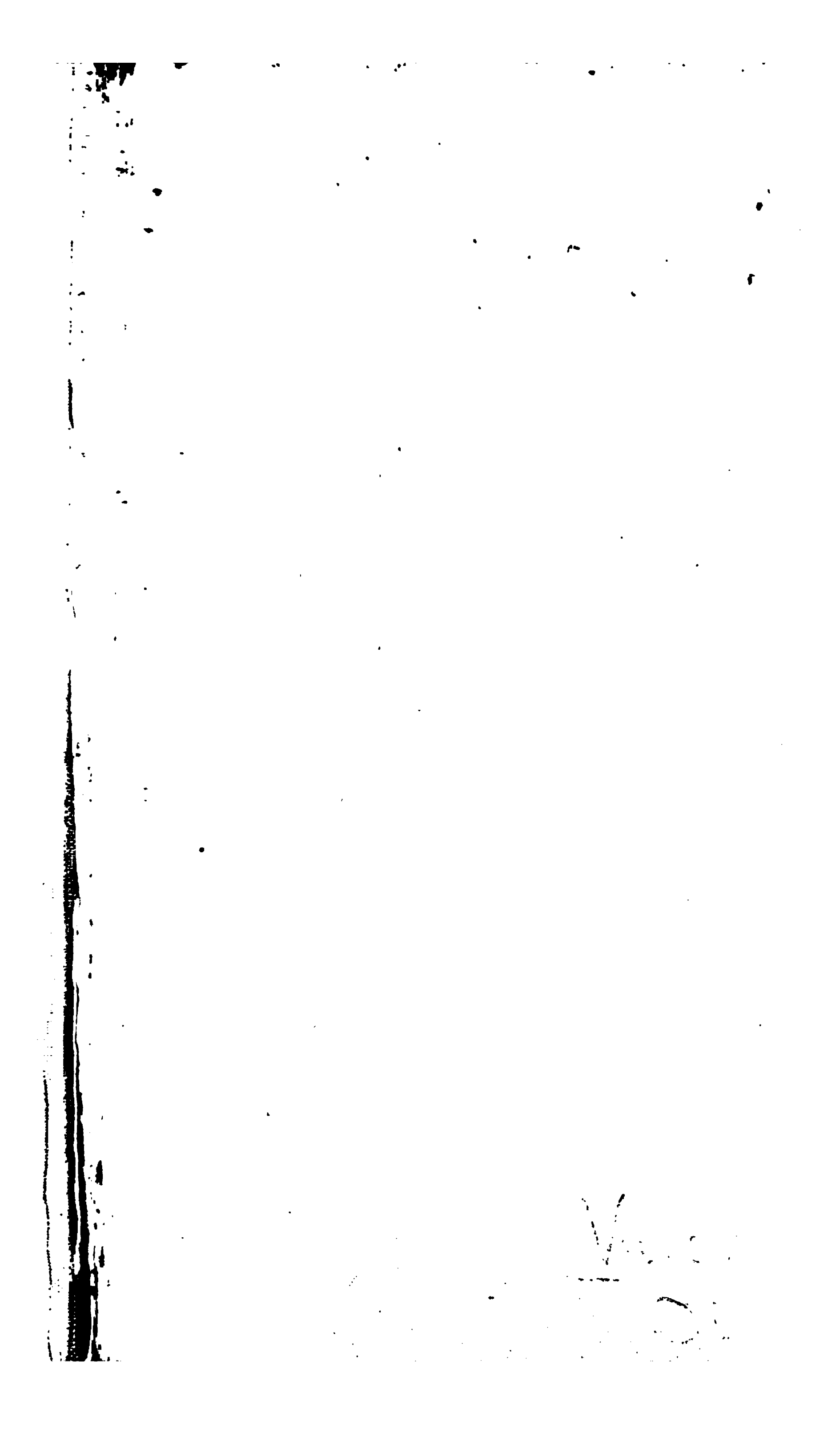



06907822 2



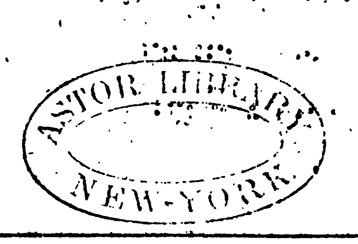


(Versuch)

OEF



Versuch
das
Studium
der
Mathematik
durch
Erläuterung einiger Grundbegriffe
und durch
zweckmäßigere Methoden
zu erleichtern.



Mit VIII. Kupfertafeln.

Bamberg und Wirzburg,
bey Joseph Anton Göbhardt
1805.

Vorrede.

Jeder Schriftsteller wünscht, daß sein Buch die Aufmerksamkeit der Leser fessele. Auch der Verfasser dieser Bogen hofft, daß den Liebhabern der Mathematik sein Werkchen nicht unwillkommen seyn werde, ungeachtet es Meinungen aufstellt, welche die Orthodoxie der meisten Geometer empören dürfte. Auch sehr weise Männer blenden oft Vorurtheile, und dann tritt oft der Fall ein, daß man mißverstanden wird, ungeachtet man sich gegen Mißverstand auch noch so sorgfältig zu verwahren gesucht hat.

Als diese Bogen bereits beym Abdrucke waren, so erhielt der Verfasser von einem Freunde einen angeblich neuen und streng mathematischen Beweis, daß die assymptotischen Flächen-Räume der Hyperbel in arithmetischer Progression wachsen, wenn die Abscissen in geometrischer Proportion sind. Allein dieser Beweis ist nicht neu, denn er ist kein anderer als der, den L'Huillier in seinen Principiis Calculi differentialis und integralis Pag. 162. gegeben hat.

Man wird in meiner Abhandlung über die Kegelschnitte einen kürzeren und leichteren Beweis der bey L'Hullier am erwähnten Orte bewiesenen Sätze finden, und es fiel dem Verfasser wohl nie ein, ihre Wahrheit zu bestreiten. Nur die Folgerung, die man daraus zieht, ist falsch; denn es folgt daraus nicht im allgemeinen: quod Spatia hyperbolica crescant, ut logarithmi abscissarum.

Es ist allerdings richtig, daß, wenn man in L'Huilliers 27ten Figur auf einer Assymptote,

CA:

$CA : CA' = CB : CB'$ nimmt, und dann die 4 Ordinaten AD, $A'D'$ BE, $B'E'$ mit der anderen Assymptote parallel zieht, die zwischen diesen 4 Linien fallenden Räume einander gleich seyen. Allein, um aus dieser Wahrheit das Corollarium primum Pag. 136 folgern zu können, müßte auch $CA : CA' = Cb' : CB$ seyn, und dieses ist nicht.

Es sey $d^2 = Sb'^2 = Cb'^2$; $CA = 1$, $CA' = 2$, so ist $CB = \frac{d^2}{2}$, $CB' = d^2$, und somit richtig $CA : CA' = CB : CB'$ oder $1 : 2 = \frac{d^2}{2} : d^2$; allein der Punkt b' Fig. 27 ist Fig. 28 A'', und es wäre somit $CA : CA' = Cb' : CB$, oder da $Cb' = d$ ist, $1 : 2 = d : \frac{d^2}{2}$. Ein Verhältniß, welches nur dann Statt haben kann, wenn $d = 4$. Da aber d was immer für einen Werth haben kann, und auch das Verhältniß der Glieder nicht unveränderlich ist, so ist die Behauptung, daß in den Hyperbeln die assymptotischen Räume wie die Logarithmen der Abscissen wachsen, im allgemeinen einleuchtend unrichtig.

Man

Man sieht also leicht, woher der Irrthum entstund. In jeder Hyperbel ist ein Verhältniß zu finden, das so geartet ist, daß, wenn man die Assimptote nach selbem eintheilt, die Flächen-Räume, welche zwischen den Ordinaten liegen, einander gleich sind; aber damit diese Gleichheit Statt habe, kann ich das Verhältniß CA: CA′ nicht willkührlich annehmen, sondern es ist dasselbe schon vorhin durch die Größe von d bestimmt.

Ist $d = 4$, so muß seyn: $CA : CA' = 1 : 2$.

Ist $d = 9$, so ist: $CA : CA' = 1 : 3$.

Ist im allgemeinen

$d = n^2$, so ist: $CA : CA' = 1 : n$.

Nimmt man aber wie L'Huillier CA: CA′ willkührlich, etwa wie $1 : n + m$, oder wie $1 : n - m$, so ist sein Corollarium offenbar falsch, und also ist auch die Applicatio p. 164 ganz unrichtig, ungeachtet sie allgemein für wahr angenommen wird. Es kann also aus der Betrachtung dieser Verhältnisse der assymptotische Raum nicht bestimmt werden; denn theilt man auch eine Assymptote in dem Verhältnisse,

wel-

welches durch die unveränderlichen Grössen der Hyperbel bestimmt ist, so weiß man, daß alle zwischen den Ordinaten eingeschlossenen Flächen einander gleich seyen, und daß, wenn die Abscisse = x^5 ist, der Flächen-Raum gleich 5 solchen kleinen Flächen sey; aber wie große in solcher krummlinigter Flächen-Raum sey, weiß ich doch nicht. Es ist also die Potenz der Hyperbel eine Transzendental-Größe, die nur durch sehr unzuverläßliche Näherung gesuchet werden muß, und ist somit keines Weges, wie L'Huillier lehrt, gleich dem halben Rektangel aus der grossen und kleinen Axe multipliciret mit dem Sinus des Winkels, den die Assymptoten einschließen. Sein P ist dieselbe Größe, welche er pag. 91 durch A bezeichnet.

Es ist selbes der unveränderliche Factor der Reihe, welche den Logarithmus ausdrückt. Wenn demnach die assymptotischen Räume in arithmetischer Progression wachsen, so muß der zwischen zwey Ordinaten, deren Abscissen in geometrischer Progression stehen, begriffene Raum die Einheit seyn, deren Multiplum den Logarithmus der Abscisse gibt.

Ich weiß wohl, daß, wenn man in der Gleichung für die Assimptoten die Differential-Gleichung des Raumes integriret, man e^2 zum Factor der Reihe bekomme; denn es wird, wenn $y = \frac{e^2}{e + x}$ gesetzet wird,

$$y = e^2 \left[\frac{1}{e} - \frac{x}{e^2} + \frac{x^2}{e^3} - \frac{x^3}{e^4} + \frac{x^4}{e^5} \dots\right]$$

also

$$ydx = dS = e^2 \left[\frac{dx}{e} - \frac{xdx}{e^2} + \frac{x^2dx}{e^3} - \frac{x^3dx}{e^4} \dots\right]$$

folglich

$$S = e^2 \left[\frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + \frac{x^3}{3e^3} - \frac{x^4}{4e^4} + \frac{x^5}{5e^5} \dots\right]$$

Vergleicht man diese Reihe mit dem Logarithmus von $1 + x$,

$$\log. 1 + x = A. \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots\right]$$

so ist einleuchtend, daß sie ganz verschieden sind, und beyde erst dann einander gleich werden, wenn man $e^2 = A = 1$ setzet.

Ist aber $e^a = \frac{1}{2}$ ab.Sin C, so darf man nur in der Gleichung von S substituiren, um sich zu überzeugen, daß $\frac{1}{2}$ ab Sin C der Model jenes Systems nicht seyn könne, dessen S der Logarithmus ist; und es ist offenbar, daß in L'Huilliers Fig. 27 der Sector CSE = Sb'BE, und nicht das Dreyeck CSb' der Model seyn müsse.

Ich glaube, diese wenigen Zeilen werden hinreichen, um zu zeigen, daß sich hier große Irrthümer eingeschlichen haben, und daß die Lehre von der Hyperbel bis daher etwas zu oberflächlich behandelt worden sey.

Nimmt man alles zusammen, was sowohl hier als in dieser Abhandlung selbst über diesen Gegenstand gesagt worden ist, so ergeben sich folgende Sätze die in meiner Abhandlung über die Kegelschnitte bewiesen werden.

Wenn a die halbe große Axe; b die halbe kleine Axe einer Hyperbel bedeuten, so setze man $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = d$. Nimmt man nun $1 : \sqrt{d}$ zum Grund-Verhältnisse, und theilt die eine Assimptote

vom Centrum aus nach diesem Grund-Verhältnisse, ziehet dann durch die Theilungs-Punkte parallele Linien mit der anderen Assymptote bis an die Hyperbel, so sind die zwischen diesen Ordinaten fallenden assimptotischen Räume einander gleich. Da nun diese Räume in arithmetischer Ordnung wachsen, während die Absciſſen, auf denen sie stehen, in geometrischer Progression zunehmen, so verhalten sich selbe wie die Logarithmen der Absciſſen.

Der Raum, der zwischen zwey solchen mit der Assymptote parallelen Ordinaten fällt, ist der Model des Logarithmischen Systems, dessen Grund-Verhältniß das Verhältniß 1: $\sqrt{d}$ ist; ist somit ein krummlinigter transzendentaler Raum, und größer als $\frac{ab\,Sin\,C}{2}$. Alle Formeln in L'Huilliers Werke, welche sich also darauf gründen, daß $\frac{ab\,Sin\,C}{2}$ die Potenz der Hyperbel sey, sind offenbar unrichtig.

Ein-

Einleitung.

Die Philosophie unseres Zeitalters sucht ihren Ruhm darin, eine Sprache zu reden, die nur die Eingeweihten verstehen, oder vielmehr selbst nicht verstehen.

Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß sie auf dem Wege, den ihre Aposteln wandlen, vieles zur Aufklärung unseres Verstandes und zur Berichtigung unserer Begriffe beytragen werden. Mögen doch diese Herrn ihre transzendentalen Kenntnisse nach Belieben verwenden, um zu erklären, was der menschlichen Vernunft unerreichbar ist. In der Mathematik sind selbe entbehrlich; denn hier muß jeder, der schreibt, nicht nur verstehen, was er schreibt, sondern auch so schreiben, daß er von andern verstanden werde.

Die mathematischen Lehrer versichern uns, daß wir ungeheure Vorschritte in der Mathematik gemacht, und die Alten weit hinter uns gelassen haben. Diese Wissenschaft gleicht meines Erachtens einem schönen Gebäude, in dem es viele lichte Zimmer giebt, aber

das schwankende Fundamente, und eine ganz finstere Stiege hat. Diese Fundamente zu befestigen, diese Stiege zu beleuchten, wäre meines Erachtens eine weit nützlichere Beschäftigung, als sich den Kopf über die Dupplicität des Ich, und das Ding an sich zu zerbrechen.'

Da die Mathematik keine anderen als strenge Beweise zuläßt: so sollte man glauben, daß in selber keine Controversen möglich seyen. So war es auch vormals, das ist, ehe man daran dachte, die Mathematik mit der Algebra zu verweben, und das Unendliche zu messen. Seit dieser für die Mathematik merkwürdigen Epoche haben sich ihre Gränzen mit denen der Methaphysik vermischet, wo jeder Satz eine Controvers ist.

Die Tendenz gegenwärtiger Blätter gehet dahin, einige dieser Controversen zu prüfen, und zu untersuchen, in wie fern es möglich wäre die streitenden zu vergleichen.

Von den negativen Größen.

Eine Größe ist etwas, das ist, und durch irgend einen Sinn wahrgenommen werden kann.

Da mehrere Größen als coexistirend gedacht werden können: so muß es auch möglich seyn den Unterschied ihrer Existenz anzugeben. Es muß also eine Methode möglich seyn, durch welche wir in den Stand gesetzet werden, diese Unterschiede wahrzunehmen und zu bestimmen.

Wenn man von zwey individuellen Dingen alles besondere abstrahirt: so sind sie ihrer Substanz nach nicht von einander unterschieden; sie können also nur in so-

fern

fern unterschieden werden, als man sie in eine Reihe stellt, oder ihre Lage bestimmt. In einer Schnur vollkommen gleicher Perlen kann ich keine unterscheiden, wenn ich nicht angebe, die wievielste in der Reihe sie sey. Zwey vollkommen gleiche Kugeln kann ich nur dadurch unterscheiden, daß ich angebe, die eine sey linker, die andere rechter Hand ꝛc. Jeder unserer Sinne ist fähig den Unterschied der Dinge durch die Reihe zu erkennen. Der Unterschied der Lage kann nur durch das Gesicht, und vielleicht durch das Gefühl wahrgenommen werden.

Wenn wir den Unterschied der Dinge durch die Reihe angeben: so sind wir Rechner; wenn wir selben durch die Lage angeben: so sind wir Mathematiker.

Wenn wir von zwey Körpern den Unterschied der Lage abstrahiren: so sind sie doch noch der Reihe oder der Zeit nach unterschieden. Die Mathematik verhält sich also zu der Algebra, wie die Art zur Gattung.

Zwey Dinge, die weder in Zeit noch Raum unterschieden sind, sind nicht gedenkbar; oder vielmehr sie sind idem, und müssen als idem gedacht werden.

Ein Ding kann nicht zugleich zwey verschiedene Bestimmungen von Zeit und Raum haben.

Zahlen sind Zeichen, die eine doppelte Bedeutung haben, nämlich eine individuelle und eine collective. Wenn ich sage die 5te Perle an der Schnur: so hat 5 eine individualisirende Bedeutung: und die Zahl dient dazu, die fünfte Perle von allen anderen in der Reihe zu unterscheiden. Wenn ich aber sage: hier sind 25 Perlen: so ist 25 ein collectiver Ausdruck. Der collective Begriff entstehet aus dem Individualisirenden. Ich kann nicht wissen, daß hier 25 Perlen seyen, wenn

sie

das schwankende Fundamente, und eine ganz finstere Stiege hat. Diese Fundamente zu befestigen, diese Stiege zu beleuchten, wäre meines Erachtens eine weit nützlichere Beschäftigung, als sich den Kopf über die Dupplicität des Ich, und das Ding an sich zu zerbrechen.

Da die Mathematik keine anderen als strenge Beweise zuläßt: so sollte man glauben, daß in selber keine Controversen möglich seyen. So war es auch vormals, das ist, ehe man daran dachte, die Mathematik mit der Algebra zu verweben, und das Unendliche zu messen. Seit dieser für die Mathematik werkwürdigen Epoche haben sich ihre Gränzen mit denen der Methaphysik vermischet, wo jeder Satz eine Controvers ist.

Die Tendenz gegenwärtiger Blätter gehet dahin, einige dieser Controversen zu prüfen, und zu untersuchen, in wie fern es möglich wäre die streitenden zu vergleichen.

Von den negativen Größen.

Eine Größe ist etwas, das ist, und durch irgend einen Sinn wahrgenommen werden kann.

Da mehrere Größen als coexistirend gedacht werden können: so muß es auch möglich seyn den Unterschied ihrer Existenz anzugeben. Es muß also eine Methode möglich seyn, durch welche wir in den Stand gesetzet werden, diese Unterschiede wahrzunehmen und zu bestimmen.

Wenn man von zwey individuellen Dingen alles besondere abstrahirt: so sind sie ihrer Substanz nach nicht von einander unterschieden; sie können also nur in so-

fern

fern unterschieden werden, als man sie in eine Reihe stellt, oder ihre Lage bestimmt. In einer Schnur vollkommen gleicher Perlen kann ich keine unterscheiden, wenn ich nicht angebe, die wievielste in der Reihe sie sey. Zwey vollkommen gleiche Kugeln kann ich nur dadurch unterscheiden, daß ich angebe, die eine sey linker, die andere rechter Hand ꝛc. Jeder unserer Sinne ist fähig den Unterschied der Dinge durch die Reihe zu erkennen. Der Unterschied der Lage kann nur durch das Gesicht, und vielleicht durch das Gefühl wahrgenommen werden.

Wenn wir den Unterschied der Dinge durch die Reihe angeben: so sind wir Rechner; wenn wir selben durch die Lage angeben: so sind wir Mathematiker.

Wenn wir von zwey Körpern den Unterschied der Lage abstrahiren: so sind sie doch noch der Reihe oder der Zeit nach unterschieden. Die Mathematik verhält sich also zu der Algebra, wie die Art zur Gattung.

Zwey Dinge, die weder in Zeit noch Raum unterschieden sind, sind nicht gedenkbar; oder vielmehr sie sind idem, und müssen als idem gedacht werden.

Ein Ding kann nicht zugleich zwey verschiedene Bestimmungen von Zeit und Raum haben.

Zahlen sind Zeichen, die eine doppelte Bedeutung haben, nämlich eine individuelle und eine collective. Wenn ich sage die 5te Perle an der Schnur: so hat 5 eine individualisirende Bedeutung: und die Zahl dient dazu, die fünfte Perle von allen anderen in der Reihe zu unterscheiden. Wenn ich aber sage: hier sind 25 Perlen: so ist 25 ein collectiver Ausdruck. Der collective Begriff entstehet aus dem Individualisirenden. Ich kann nicht wissen, daß hier 25 Perlen seyen, wenn

sie nicht der Reihe nach durch meine Hände gegangen oder gezählet worden sind.

Alles, was existirt, ist etwas positives. Was nicht existirt, kann nicht gezählt werden.

Es kann demnach keine collektive Zahl als negativ gedacht werden; denn da die Zahl ein Ausdruck ist mittels der man die Menge coexistirender verschiedener Dinge bezeichnet: so kann die Negation nur die Existenz oder die Verschiedenheit treffen; also ist eine negative Zahl ein handgreiflicher Widerspruch.

Der Ausdruck — 3 ist also in der Arithmetik Unsinn. Weniger als nichts ist nicht gedenkbar.

Der Ausdruck 3 — 5 ist ebenfalls Unsinn; wo nur drey Perlen sind, kann ich nicht 5 Perlen wegnehmen. Zwey negative Perlen sind zwey Perlen, die keine Perlen sind.

Allein, wenn die Zahlen eine individualisirende Bedeutung haben: so kann der Ausdruck — 3 eine verständige Bedeutung haben. Wenn ich 25 Perlen an einer Schnure habe, und ich fange in der Mitte zu zählen an: so kann ich rechts und links zählen; bezeichne ich die 6te Perle rechts durch 6: so kann ich die 6te Perle links durch — 6 bezeichnen. Eben so kann man die Theile einer Linie, welche einem Punkte in der Linie zur rechten Hand liegen, von denen, die ihm zur linken Hand liegen, durch + — unterscheiden. Immer bleibt aber der Ausdruck negative Größe sehr unphilosophisch, denn es wird durch diese Unterscheidungszeichen nichts negiret, sondern nur angezeigt, daß die Theile, deren Summe ich — n nenne, eine andere dem + n entgegengesetzte Lage haben. Hier ist also Opposition und keine Negation, und zwar eine Opposition in Sensu

zjente, denn es kann kein — n ohne einem + n gedacht werden. Das Niedergehen ist dem Aufgehen opponirt; aber nicht, wie Kant sagt, ein negatives Aufgehen.

Aus diesem ist leicht zu ersehen, daß die bisherige Anleitung zum Gebrauche der sogenannten negativen Größen sehr unvollkommen sey; denn

1mo Hat man die Begriffe dieser Opposition auch auf die Zahlen ausgedehnt, in sofern sie eine collektive Bedeutung haben; wo doch nach der Natur der Sache keine Opposition gedenkbar ist.

2do Hat man über den Gebrauch der negativen Zeichen und ihrer Verbindung mit positiven ganz irrige Grundsätze angenommen, und behauptet, die positiven Größen würden durch die negativen aufgehoben, weil man die Opposition mit der Negation verwechselte; die Theile einer Linie, welche dem Punkte a zur rechten Hand liegen, werden durch die, welche ihm zur linken Hand liegen, nicht null.

Es ist demnach einleuchtend, daß die Zeichen der Algebra zweydeutig sind, und daß durch diese Zweydeutigkeit große Verwirrungen in dieser Wissenschaft angerichtet werden. + — sind Zeichen der Addition und der Subtraktion, und es ist zweckwidrig, eben diese Zeichen zu Unterscheidungszeichen der Größen, mit denen operiret wird, zu gebrauchen.

Man sagt uns $+ a + (-b)$ sey $= a - b$, und $+ a - (-b) = a + b$; dieses ist ganz falsch, denn bedeuten a und b Zahlen im collectiven Verstande: so ist $-b$ Unsinn, wie bereits oben gezeigt wurde. Sind aber a und b opponirte Grössen, und — + Zeichen dieser Opposition: so ist diese Weisung im allgemeinen falsch, und nur unter bestimmten Umständen richtig.

Ge-

Gesetzt ein Mensch habe 1000 fl. im Vermögen, und 500 fl. Schulden: so kann ich seine Activen durch $+$, seine Passiven durch $-$ ausdrücken, und kann schreiben, er habe $+ 1000$ fl. und $- 500$ fl. Frage ich dann, wie viel bleibt ihm am Vermögen: so muß ich die Schulden vom Vermögen abziehen, und es findet sich, daß er 1000 fl. $- (- 500)$ im Vermögen habe. Nach obiger Formel hätte er aber 1500 fl. im Vermögen, weil $- (- 500$ fl.$) = + 500$ fl. wäre.

Frage ich dagegen, wie viel betragen die Aktiven und Passiven zusammen, so muß ich die Schulden zu den Activen addiren. Verführe man also nach obiger Regel: so wäre die Summe 1000 fl. $+ (- 500$ fl.$) = 500$ fl.

Die Multiplikation und Division negativer Größen ist keiner Zweydeutigkeit unterworfen, sobald man die Begriffe richtig bestimmt. $- 3 \times 2$, kann zweyerley bedeuten. Entweder fragt man, wie groß das doppelte der negativen Größe sey, und alsdann ist 2 weder positiv noch negativ, sondern eine Zahl im collektiven Sinne; daraus folgt dann, daß die negative Größe $- 3$ zweymal genommen $- 6$ seyn müsse.

Eben so ist $\frac{-3}{2} = - 1\frac{1}{2}$; denn die Hälfte der negativen Größe ist auch negativ; daraus ist einleuchtend, daß $3 \times (- 2)$; $\frac{3}{-2}$ Unsinn sey. Denn die Zahl kann der Coeffizient einer negativen Größe, aber nicht die negative Größe Coeffizient einer Zahl seyn.

Allein es kann auch $- 3 \times 2$ bedeuten, daß man zu 1, 2 und $- 3$ die vierte Proportional-Größe, das ist eine Größe suchen solle, die sich zu $- 3$ verhalte, wie 2 : 1.

In

In diesem Falle ist zu unterscheiden, ob die Einheit eine Größe, die eine Opposition zuläßt, oder eine Zahl sey; das ist: ob sie mit — 3 gleicher Art sey oder nicht.

Ist die Einheit eine Größe gleicher Art mit — 3: so ist das Produkt eine Zahl, und folglich weder positiv noch negativ; es mögen die Zeichen der beyden anderen Größen positiv oder negativ seyn. Es sey das Vermögen des Peters 1000 Gulden, seine Schulden — 500 fl. Das Vermögen des Pauls 3000 fl., seine Schulden — 500 fl.

Frage ich, wie verhält sich das Vermögen des Peters zu dem des Pauls, so habe ich:

$$+ 1000 : + 3000 = 1 : 3.$$

Frage ich, wie verhalten sich die Schulden des einen zu den Schulden des anderen, so ist:

$$- 500 \text{ fl.} : - 2500 = 1 : 5.$$

Frage ich, wie verhalten sich die Schulden des Peters zu seinem Vermögen, so ist:

$$- 500 \text{ fl.} : + 1000 = 1 : 2.$$

Der Unterschied der Zeichen in den 2 ersten Gliedern ändert also lediglich nichts in den beyden anderen, weil sie bloß Zahlen weder positiv noch negativ sind.

Allein in der Geometrie können alle drey gegebenen Größen einer Opposition fähig seyn; da alsdann die 4te gesuchte Größe von eben der Art seyn muß: so fragt sichs, welches Zeichen bekommt das 4te Glied, wenn die Zeichen der übrigen verschieden sind? Hier sind mehrere Fälle möglich.

Es seyen a, b, c die gegebenen, x die gesuchte Größe, so ist, wenn:

$1^{mo}.\ +a : +b = +c : +x$, x positiv; aus eben diesem Grunde ist also auch:

$2^{do}.\ -a : -b = -c : -x$, x negativ. Die 4te Proportional-Größe zu drey positiven Größen muß positiv, die 4te Proportional-Größe zu zwey negativen Größen muß negativ seyn. Ist:

$3^{tio}.\ +a : -b = +c : -x$, so muß x negativ seyn; ist endlich:

$4^{to}.\ +a : +b = -c : -x$, so ist x auch negativ. Denn gesetzt x wäre in beden Fällen positiv: so verhielt sich im ersten Falle:

1. positives : negativen = positiv : positiven; im 2ten Falle.

2. positives : positiven = negatives : positiven, beydes ist Unsinn. Man braucht nur die Regel de Tri zu verstehen, um dieses einzusehen. Denn ein Verhältniß kann nur zwischen Größen gleicher Art gedacht werden.

Setzte man:

$5^{to}.\ +a : -b = -c : \mp x$, oder

$6^{to}\ -a : +b = +c : \mp x$; so würde man in beyden Fällen Unsinn schreiben, und eben so albern rechnen, als wenn man setzte:

16 Stücke kosten : 32 fl. = wie viel kosten 100 fl?

Ich glaube, daß durch diese wenigen Bemerkungen alle Zweifel gehoben sind, welche von der Verschiedenheit der Zeichen herrühren; und daß man einsehen müsse, daß man nicht in allen Fällen durch die Multiplikation der mittleren Glieder und durch die Division mit dem ersten einen 4ten Terminum finden könne. Man muß denken, wenn man rechnet, und sieht dann ein, daß man nicht bloß auf die Zeichen, sondern auch auf

ihre

ihre Bedeutung und die richtige Stellung der Glieder Rücksicht nehmen müsse.

Es sey im Verhältnisse Nro. 2, $a = 1$, $c = b$, so ist:

$$-1 : -b = -b = -b^2$$

also ist offenbar $-b$ die mittlere Proportional-Größe zwischen -1 und $-b^2$. Drückt man also diese mittlere Proportional-Größe durch das Zeichen $\sqrt{\ }$ aus: so ist $\sqrt{-b^2} = -b$, und keines wegs unmöglich oder immaginär.

Dieses ist eine von den großen Controversen, die schon seit Descartes Zeiten unseren Algebristen zu schaffen machen, und über die von vielen ganz erbärmlich deraisonniret worden ist. Es wird also dienlich seyn, die Gründe unserer Mathematiker zu prüfen.

Es ist, sagen sie, keine Größe möglich, die mit sich selbst multiplizirt $\sqrt{-b^2}$ zum Producte gäbe, also ist $\sqrt{-b^2}$ eine unmögliche Größe.

Hier ist fast jedes Wort schief und zweydeutig. Eine Größe mit sich selbst multipliciren ist Unsinn. Eine Größe kann nmal vergrössert, aber nicht mit n multipliciret werden. Zu der Einheit und einer Größe kann ich eine dritte Proportional-Größe suchen, aber nur Zahlen kann ich multipliciren. Bedeutet also $-b^2$ eine Zahl: so läßt sich freylich keine Wurzel von $-b^2$ finden, denn da eine negative Zahl nicht denkbar ist: so ist auch ihre Wurzel nicht denkbar. Aber die mittlere Proportional-Größe zwischen zwey negativen Größen ist doch gewiß denkbar, und es kann doch niemand so unvernünftig seyn zu behaupten, daß die mittlere Proporzional-Größe zwischen zwey negativen Größen eine positive Größe sey. Die mittlere Proportional-Größe

der

der Schulden zweyer Verschwender kann doch unmöglich ein Activ-Vermögen seyn.

Man hat die geometrischen Constructionen zu Hülfe genommen, um einen so offenbar unwahren Satz zu erweisen. Karsten bedient sich folgender Figur. Man nenne $AD = + 1$ (Fig. 1.) $DB = - A$. Man theile AB in 2 gleiche Theile, und beschreibe einen Kreis, so wird er die senkrechte DE in keinem Punkte schneiden; also ist keine mittlere Proportional-Größe zwischen 1 und $-A$ möglich. Wie kann ein Geometer solche Gründe anführen? Man kann auf folgende Art zeigen, daß eine mittlere Proportional-Linie in diesem Falle wohl möglich sey. Man mache $AD = 1$, $AB = - A$, (Fig. 2.) halbire BD, so schneidet der Kreis die senkrechte in DE, und AE ist die mittlere Proportional-Größe. Wer sieht nicht, daß die Möglichkeit oder Unmöglichkeit von dem Punkte abhange, von welchem aus man das Negative zählt?

Hier ist ein anderer Beweis, der vielleicht bündiger scheinen wird.

Man nenne den Winkel BCA, A. $BC = + 1$; so ist $CD = + \text{Cos } A$, $CE = + \text{Cos}^2 A$. (Fig. 3.) Man mache $CF = CD$, so ist $CF = - \text{Cos } A$. CH muß also unwidersprechlich $- \text{Cos}^2 A$ seyn. FC ist ganz unläugbar die mittlere Proportional-Größe zwischen KC und CH, also ist $- \text{Cos } A = \sqrt{- \text{Cos}^2 A}$.

Nehme ich den Radius CB zu einem Terminus, CH aber zum anderen: so ist offenbar der mittlere $= FC = CD$ zugleich positiv und negativ; es ist also einleuchtend unwahr, daß alsdann keine mittlere Proportional-Größe möglich sey; sie müßte, sagt Karsten, entweder

weder positiv oder negativ oder null seyn. Nun behauptet er, aber beweiset nicht, daß keiner dieser Fälle möglich sey. Ich glaube erwiesen zu haben, daß die Proportional-Größe in diesem Falle und nur in diesem Falle zwey Werthe einen positiven und einen negativen habe; denn wenn beyde Glieder positiv oder beyde negativ sind: so kann das mittlere nur einen Werth haben.

$y = \sqrt{px}$ ist die Gleichung der Parabel; das y, sagt man uns, wird unmöglich, wenn x negativ genommen wird. Ein Glaubensartikel mag dieses wohl seyn, aber ich sehe keinen Beweis, daß dieses richtig sey, und daß eine Parabel nur dann entstehe, wenn ich x (Fig. 4.) von B nach C positiv nehme; daß aber die Bildung einer Parabel unmöglich sey, wenn ich x von B nach A, das ist, negativ nehme.

Ich widerspreche nicht, daß, wenn in einer Gleichung die Größe, welche zu subtrahiren ist, größer ist als die vorgehende, wir nothwendig darauf geführt werden müssen zu muthmaßen, daß wir irrige Verhältnisse vorausgesetzet haben, und wir dann untersuchen müssen, in wie fern dieser Irrthum aus der Natur der Aufgabe fließt; allein Jedermann muß einsehen, daß der Fehler unserer Geometer darin liege, daß sie, was in einigen Fällen wahr ist, auf alle Vorfälle anwenden.

Wenn man demnach eine geometrische Größe unter dem Wurzelzeichen sieht: so kann man nicht urtheilen, eine ihr entsprechende Linie zu construiren sey unmöglich. Die Unmöglichkeit muß aus der Natur der Gleichung deduciret werden.

Die Algebristen reduciren auf $a\sqrt{-1}$ alle unmöglichen Größen. Dieses ist nur in so fern wahr als -1 eine Zahl bedeutet; alsdann ist $\sqrt{-1}$ nicht sowohl unmög-

möglich, als ein mathematisch bezeichneter Unsinn. Bedeutet aber 1 eine einer Opposition fähige Größe: so ist $\sqrt{-1} = -1$. Die mittlere Proportional-Größe zweyer Schulden ist gewiß eine Schuld und kein Activum.

Euler beredete die Algebristen, daß jede Cubische Gleichung dreyerley Werthe habe. Er nimmt $x^3 - 8 = 0$ und dividirt durch $x - 2 = 0$ so findet er $x^2 + 2x + 4 = 0$. Aus diesem entwickelt er die unbekannte, und findet: $x = -1 \mp \sqrt{-3}$.

Die Geometrie muß damit anfangen, daß sie gesunden Menschenverstand habe. Dieser sagt nun, daß die Zahl 8 drey gleiche Wurzeln habe; denn es ist $8 = 2.2.2$. Die schönen Künste, durch welche Euler unmögliche Wurzeln entdecket, sind also weiter nichts, als eine algebraische Spielerey mit Zeichen ohne Sinne. Was unmöglich ist, kann nicht gedacht, und also auch nicht immaginirt werden. Was unmöglich ist, kann durch keine Verbindung mit anderen möglich werden. Die Summe zweyer Unmöglichen oder das Produkt des Unmöglichen durch das Unmögliche ist nicht möglich, und kann nie einer möglichen und wirklichen Größe gleich seyn. Diese Axiomen sind Aussprüche des gesunden Menschenverstandes, gegen die alle Evolutionen der Algebra, sie mögen auch noch so künstlich seyn, weiter nichts beweisen, als daß die Algebristen viel rechnen, und nicht denken. Hätte Euler auch ex inspiratione geschrieben: so würde ich gegen ihn und alle Algebristen mit voller Ueberzeugung behaupten, daß, da -3 Unsinn ist, auch $\sqrt{-3}$ und $1 + \sqrt{-3}$ Unsinn seyn müsse.

Man mißverstehe mich nicht. Ich sage -3, $\sqrt{-3}$ rc. sind Unsinn in so fern sie Zahlen im collektiven Sinne sind, aber nicht in so fern sie Größen bezeichnen, bey

denen

denen eine Opposition möglich ist; dann sind $-3, \sqrt{-3}$ mögliche und wirkliche Größen. Der Fehler unserer Geometer bestehet darin, daß sie auf Mengen ausdehnen, was nur von Größen, die einer Opposition fähig sind, wahr ist, und daß sie die Multiplikation, eine Rechnungs-Operation, die nur bey Mengen statt hat, auf Größen anwenden, die keine Mengen sind. Um dieses deutlicher einzusehen, wollen wir die Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ wider vornehmen.

Ist hier von Zahlen die Rede: so bedeutet diese Zeichen-Verbindung folgende Aufgabe. Welche Menge giebt dreymahl mit sich selbst multiplizirt eine Menge $= a^3$. Da kann also von keiner negativen Menge, von keiner Nicht-Menge die Rede seyn; und $x = a$ ist der einzige gedenkbare Werth von x.

Dividirt man $x^3 - a^3 = 0$, durch $x - a = 0$: so dividirt man, was nicht ist, in o Theile, das ist, man dividiret gar nicht, und die Division ist eine bloße Spielerey mit Zeichen.

Allein, wenn von geometrischen Linien die Rede ist, verhält es sich anders.

Dann heißt Dividiren die 4te Proportional-Größe zu $x^3 - a^3$, $x - a$, und 1 suchen; dann ist $\frac{0}{0}$ nicht $= 0$; $\frac{\text{Cos A.}}{\text{Cos A.}}$ ist $= 1$: man mag Cos A so klein nehmen, als man will. Es ist also:

$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{0}{0}$, nie $= 0$, man mag dem x was immer für einen Werth geben.

Man

Man sieht also hieraus, daß die ganze Operation schon in ihrer Grundlage ein Gewebe von Unsinn und Widerspruch sey. Denn, wenn x eine veränderliche Größe ist: so muß ungeachtet aller möglichen Veränderungen des Werthes von x, $x^3 = a^3$; $x = a$ bleiben. Man nimmt also eine veränderliche Größe an, die einer unveränderlichen immer gleich bleibt. Ist dieses nicht ein handgreiflicher Widerspruch?

Da x jeden Werth erhalten kann: so setze man $x = o$; so wird: $o^3 - a^3 = o$, also $a^3 = o$. Wie kann eine unveränderliche Größe Null werden?

Nichts kann aber abentheuerliches gedacht werden, als der Gebrauch des Zeichen $\sqrt{-1}$ bey Berechnung mathematischer Größen, welche wir ebenfalls Eulern verdanken. Er behauptet, daß das Produkt von $\sqrt{-1}$ durch $\sqrt{-1} = -1$ sey, das ist, daß die dritte Proportional-Größe zu dem, was unmöglich ist, etwas wirkliches sey. Wäre von Zahlen die Rede: so würde der Ausdruck -1 nicht etwas wirkliches, sondern etwas nicht existirendes andeuten, weil die Negation bey dem, was nur als existirend gedacht wird, nur die Existenz treffen kann; aber wenn von geometrischen Größen die Rede ist: so ist -1 eine wirkliche nur der Richtung nach vom $+1$ unterschiedene und entgegengesetzte Linie. Wie nun eine Linie, die nicht construirt werden kann, mit einer wirklichen in einem Verhältnisse stehen könne, und aus welchen Gründen das Quadrat zweyer Größen, die, da sie unmöglich sind, weder positiv noch negativ seyn können, ein negatives Quadrat und kein positives sey, übersteigt meine Fassungskraft. Ich glaube leichter an die Cabala, als an eine solche Geometrie.

Um

Um die Ungereimtheit dieser Behauptungen ganz zu übersehen, wird es dienlich seyn, folgende Aufgabe zu lösen.

Es seyen a^2, b^2 zwey Quadrate. Man soll eine Größe finden, deren Quadrat von a^2 subtrahiret, gleich der Summe von $a^2 + b^2$ sey.

Schon auf dem ersten Blicke sieht man, daß diese Aufgabe ungereimt sey. Es sey x diese Größe, so muß $a^2 - x^2 = a^2 + b^2$. Eine Gleichung, die, wenn von Quadraten die Rede ist, unter keiner Bedingung möglich ist.

Allein es können a^2, b^2, x^2 auch die dritten Proportional-Linien zu 1 und a, 1 und b bedeuten, und diese Linien können dann positiv und negativ seyn. Dann muß x^2 negativ, aber $= b^2$ genommen werden. In der Figur 3 ist $CB = 1$; $CE = \text{Cos}^2 A$. Soll nun $1 - x^2 = 1 + \text{Cos}^2 A$ seyn, so sehe ich alsobald, daß ich x^2 negativ nehmen müsse, und ich erkenne, daß

$$BC - (-CH) = CB + CE \text{ sey.}$$

Euler lehrt uns folgender Gestalt zu verfahren. Er nennt x die unbekannte Zahl. Daraus wird: $-x^2 = b^2$, folglich $x = b\sqrt{-1}$, und es findet sich dann

$$a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})\,(a - b\sqrt{-1}.)$$

Es steht in dem Belieben jedes Geometers für neue Begriffe neue Zeichen zu gebrauchen, allein bey dem Gebrauche der Zeichen muß er auf Folgendes Rücksicht nehmen.

1mo Darf er nicht schon angenommene Zeichen zur Bezeichnung seines neuen Begriffes gebrauchen, denn daraus entstehen Zweydeutigkeiten, die man in der Geometrie sorgfältig verhüten muß.

2do Darf er seine Zeichen in keine Verbindung mit anderen Zeichen setzen, als in so fern eine natürliche Verbindung auch zwischen den Begriffen ist, welche bezeichnet werden.

3tio Kann diese Verbindung nicht willkührlich angenommen, sondern muß erwiesen werden.

Alle diese natürlichen Gesetze der Vernunft werden bey dieser Gelegenheit mit Füssen getreten. Der horizontale Strich — bedeutet die Opperation der Subtraction; durch Mißbrauch bedeutet auch — die Entgegensetzung zweyer Größen. Allein keine von diesen Bedeutungen ist hier anwendbar. $\sqrt{-1}$ bezeichnet eine Subtraction ohne etwas, von dem es abgezogen werden kann, oder eine negative Größe ohne einem Positiven, dem sie entgegengesetzt wäre, in beyden Fällen also wäre ein Referens ohne Relat.

$\sqrt{-1}$ soll das Unmögliche bedeuten. Was ist denn Unmögliches in den Bestandtheilen dieses Zeichens? Die Einheit ist es nicht. Eine negative Einheit ist auch nichts unmögliches, wenn von geometrischen Größen die Rede ist. $\sqrt{}$ bedeutet die Operation, mittelst derer man zwischen zwey Größen eine mittlere Proportional-Größe sucht. Wir haben gesehen, daß man zu einer negativen geometrischen Größe und der sowohl positiven als negativen Einheit eine mittlere Proportional-Größe finden könne. Man hat bewiesen, daß Fig. 3. CF = CD die mittlere Proportional-Größe zwischen dem positiven Radius CB und der negativen Größe CH sey. Es ist also weder in den Bestandtheilen, noch in der Verbindung des Zeichens etwas, was die Unmöglichkeit anzeigte. Wenn demnach $\sqrt{-1}$ das Unmögliche anzeigen soll: so ist es kein durch Analogie und Vorbestim-

mungen

mungen abgeleitetes, sondern ein willkührlich angenommenes Zeichen, und man könnte eben so gut durch o den Begriff oder vielmehr den Nichtbegriff des Unmöglichen bezeichnen.

Man nehme also an, o sey das Zeichen der Unmöglichkeit, so sind wir dann um nichts weiter, denn wir müssen nun aus den Begriffen des Unmöglichen die Verhältnisse desselben gegen sich selbst und gegen andere Größen ableiten. Wir müssen beweisen, daß $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ sey. Es ist nicht genug, daß wir zeigen, es müsse dieses Produkt $= -1$ seyn, weil sonst das gesuchte Facit nicht herauskommt. Wir müssen die Möglichkeit zeigen, daß das Unmögliche unmögliche Male genommen, eine mögliche und wirkliche Größe werde; wir müssen zeigen, daß das Unmögliche durch die Multiplikation vermehret oder vermindert werde, oder sich selbst gleich bleibe, und somit $\sqrt{-1}$ größer oder kleiner, oder dem -1 gleich sey.

Ist in der Gleichung

$$(a + b\sqrt{-1}).(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$$

der erste Factor größer oder kleiner als a? Kann man hierüber nichts sagen, das gesunden Menschenverstand hätte: so ist es offenbar, daß $\sqrt{-1}$ ein Zeichen sey, das nichts bedeutet, und dem gar kein Begriff entspricht; solche sinnlose Zeichen gehören aber nicht in die Geometrie.

Es seyen in einem Dreyecke zwey Seiten a und b, und ein gegenüberliegender Winkel B gegeben, so ist die dritte Seite, die wir x nennen wollen:

$$x = a \operatorname{Cos} B \mp \sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2 B}$$

Ist a Sin B größer als b, so ist mit diesen gegebenen

Größen kein Dreyeck zu construiren möglich. Allein ist es richtig, daß das Quadrat einer unmöglichen Größe gleich dem negativen Quadrate sey: so wird x möglich, denn es ist

$x - a \operatorname{Cos} B = \sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2 B}$, also

$x^2 - 2ax \operatorname{Cos} B + a^2 \operatorname{Cos}^2 B = -(b^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2 B)$

$= a^2 \operatorname{Sin}^2 B - b^2$

also: $x = a \operatorname{Cos} B \mp \sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2 B - b^2}$,

und folglich zugleich möglich und unmöglich.

Was liegt an der methaphysischen Orthodoxie der Zeichen, sagen unsere Geometer? Wir suchen nur Methoden, um bestimmte Resultate zu finden. Giebt uns der Gebrauch dieser Zeichen, so vernunftwidrig sie auch seyn mögen, genaue Resultate: so liegt an dem übrigen wenig. Welche sinnreiche Zeichen-Entwickelung giebt nicht die Formel

$(\operatorname{Cos} A - \operatorname{Sin} A \sqrt{-1})^2 = \operatorname{Cos}^2 A - \operatorname{Sin}^2 A.$?

Wir können absurde Grundsätze auf richtige Resultate führen?

Allein, wenn wir keine andere Methode hätten, diese Resultate zu finden: wie wüßten wir, daß diese Resultate richtig seyen? Haben wir aber andere, so ist es höchst albern, sich der unvernünftigsten aller Methoden zu bedienen, und die Geometrie zu einer mechanischen Scriblerey herabzuwürdigen. Eine falsche Methode kann einige richtige Resultate liefern, weil sich die Fehler manchmahl compensiren. Wo ist aber der Beweis, daß sie sich immer und in allen Fällen compensiren müssen?

Auch als Exponenten bringen die Algebristen $\sqrt{-1}$ in die Rechnung; $e^{z\sqrt{-1}}$ ist auch eines von den Zei-

chen,

chen, über das der gesunde Menschenverstand den Bannfluch ausspricht. Man höre, was einer der neuesten Lehrer von ihnen sagt: „Man muß dieses Zeichen nur „als ein Zeichen betrachten, das die Mathematiker ein„geführet haben, um die Rechnungen zu erleichtern. „Es wäre vergebliche Mühe, zu untersuchen, was diese „Zeichen für sich bedeuten, da ihnen, für sich betrach„tet, kein Begriff entspricht; auch können sie in keiner „Rechnungs-Operation zu etwas wirklichen führen, als „in sofern die mit verbundenen Zeichen der Unmöglich„keit sich wechselseitig vernichten.

Wir brauchen kein anderes Bekenntniß, als dieses Bekenntniß eines der eifrigsten Verfechter dieses mathematischen Unsinnes. $e^{\sqrt{-1}}$ sagt er uns, ist ein Zeichen, dem gar kein Begriff entspricht. Die Zeichen des Unmöglichen sind nichts, und werden erst dann etwas, wenn sie sich vernichten. Das nenne ich die Mathematik des Tollhauses, dagegen sind die Deliria der neuesten Transzendental-Philosophie Weisheit.

Alles wahr! aber diese Zeichen erleichtern auf eine bewunderungswürdige Weise einige Operationen und Untersuchungen, und liefern Resultate, deren Genauigkeit durch andere Methoden bewährt ist. — Sind andere mathematisch richtige Methoden bekannt, um diese Resultate zu finden, warum führt man in der Mathematik diese absurde, unsinnige Methode ein? — Der Leichtigkeit wegen? — Wie! vergißt man den Zweck der Mathematik? soll sie uns nicht lehren, die Verhältnisse der Größen und ihre natürliche Verbindung zu erkennen und einzusehen? Und dazu, zu dieser Einsicht, zu dieser deutlichen Vorstellung soll man leichter gelangen, wenn man

sich

sich einiger Zeichen bedient, bey denen man gar nichts denkt? Werden diese Herren uns nicht auch bereden wollen, daß man seinen Weg leichter findet, wenn man die Augen zumacht?

Sie liefern richtige Resultate. Wie weiß man das, wenn die anderen Methoden, durch die man auf dieselben Resultate kömmt, selbst nicht streng mathematisch richtig sind? Man muß also diese anderen Methoden ebenfalls prüfen. Aber auch unter dieser Voraussetzung ist der Gebrauch nonsensicalischer Zeichen verwerflich, und es wäre durch das Zusammentreffen nur eine Compensation des Unsinnes erwiesen.

Ich sagte vorhin, daß der Gebrauch dieses nonsensicalischen Zeichens ein bloßes Kinderspiel sey, das keinen Nutzen hat, weil man durch andere Methoden dasselbe finden könne. Es wird dienlich seyn, einige Beweise zu liefern.

Wenn man in der Formel

$$\mathrm{Sin}\, A + B = \mathrm{Sin}\, A\, \mathrm{Cos}\, B + \mathrm{Sin}\, B\, \mathrm{Cos}\, A$$

und

$$\mathrm{Cos}\, A + B = \mathrm{Cos}\, A\, \mathrm{Cos}\, B - \mathrm{Sin}\, A\, \mathrm{Sin}\, B$$

dem A nach und nach den Werth 2B, 3B ... nB giebt: so findet man Formeln für die Sinusse und Cosinusse der Multiplen des Winkels B; man hat zum Beyspiele

$\mathrm{Sin}\, 2B = 2\, \mathrm{Cos} B\, \mathrm{Sin}\, B$	$\mathrm{Cos} 2B = \mathrm{Cos}^2 B - \mathrm{Sin}^2 B.$
$\mathrm{Sin}\, 3B = \mathrm{Cos}^3 B - 3 \mathrm{Cos} B\, \mathrm{Sin}^2 B$	$\mathrm{Cos} 3B = 3\, \mathrm{Sin}\, B\, \mathrm{Cos}^2\, B - \mathrm{Sin}^3 B$
$\mathrm{Sin} 4B = \mathrm{Cos}^4 B - 6 \mathrm{Cos}^2 B \mathrm{Sin}^2 B + \mathrm{Sin}^4 B$	$\mathrm{Cos} 4B = 4\, \mathrm{Cos}^3\, B\, \mathrm{Sin}\, B - 4 \mathrm{Cos} B\, \mathrm{Sin}^3 B$

und so weiter.

Betrachtet man diese Formeln, und verlangt man eine Methode, den Sinus und Cosinus eines Winkels n B ohne mühesames Rechnen zu finden: so bemerkt man leicht, daß die Summe des Cosinus und des Sinus zusammgenommen, viele Aehnlichkeit mit dem Binomium $(\text{Cos } B \mp \text{Sin } B)^n$ habe, und daß nur in dem vorgesetzten Zeichen ein Unterschied sey, dann es ist z. B.

$(\text{Sin } 4B + \text{Cos } 4B) = \text{Cos}^4 B + 4 \text{Cos}^3 B \text{ Sin } B - 6 \text{Cos}^2 B \text{ Sin}^2 B - 4 \text{Cos } B \text{ Sin}^3 B + 4 \text{Sin}^4 B.$

$(\text{Cos } B + \text{Sin } B)^4 = \text{Cos}^4 B + 4 \text{Cos}^3 B \text{ Sin } B + 6 \text{Cos}^2 B \text{ Sin}^2 B + 4 \text{Cos } B \text{ Sin}^3 B + 4 \text{Sin}^4 B.$

$(\text{Cos } B - \text{Sin } B)^4 = \text{Cos}^4 B - 4 \text{Cos}^3 B \text{ Sin } B + 6 \text{Cos}^2 B \text{ Sin}^2 B - 4 \text{Cos } B \text{ Sin}^3 B + 4 \text{Sin}^4 B.$

also: $\frac{(\text{Cos } B + \text{Sin } B)^4 + (\text{Cos } B - \text{Sin } B)^4}{2} =$

$\text{Cos}^4 B + 6 \text{Cos}^2 B \text{ Sin}^2 B + \text{Sin}^4 B.$[1]

$\frac{(\text{Cos } B + \text{Sin } B)^4 - (\text{Cos } B - \text{Sin } B)^4}{2} =$

$4 \text{Cos}^3 \text{ Sin } B + 4 \text{Cos } B \text{ Sin}^3 B,$

Um also den Cosinus 4 B zu finden, darf man nur die Zeichen so änderen, daß die gleichen Glieder immer das Zeichen $-$, die Ungleichen das Zeichen $+$ haben. Wir wollen diesem gemäß Sinus und Cosinus 7 B suchen.

$(\text{Cos} B \mp \text{Sin } B)^7 = \text{Cos}^7 B \ldots 7 \text{Cos}^6 B \text{ Sin } B \ldots 21 \text{Cos}^5 B \text{ Sin}^2 B \ldots 35 \text{Cos}^4 \text{ Sin}^3 B \ldots 35 \text{Cos}^3 B \text{Sin}^4 B \ldots 21 \text{Cos}^2 \text{Sin}^5 B \ldots 7 \text{Cos} B \text{Sin}^6 B \ldots \text{Sin}^7 B.$

es ist also:

$\text{Sin } 7B = 7 \text{Cos}^7 B - 21 \text{Cos}^5 \text{Sin}^2 B + 35 \text{Cos}^3 \text{ Sin}^4 B - 7 \text{Cos } B \text{ Sin}^6 B.$

$\text{Cos } 7B = 7 \text{Cos}^6 B \text{Sin} B - 35 \text{Cos}^4 B \text{Sin}^5 B + 21 \text{Cos}^2 B \text{Sin}^5 B - \text{Sin}^7 B.$

Um

Um also Cos n B zu finden, erhebe man (Cos B $\mp$ Sin B) zur nten Potenz, und lasse die Zeichen der Addition und Subtraktion weg. Man schreibe die ungeraden Glieder und die geraden besonders. Die ungeraden geben den Sinus, wenn man dieselben abwechselnd durch die Zeichen + und — verbindet. Die geraden Glieder geben den Cosinus, wenn man auf dieselbe Art verfährt.

Dieses lehrt uns Euler auf folgende Art finden.

Man erhebe ($\text{Cos } B + \text{Sin } B\sqrt{-1}$) auf die nte Potenz, ($\text{Cos } B - \text{Sin } B\sqrt{-1}$) ebenfalls auf die nte Potenz, addire diese Potenzen, und dividire sie durch 2, so gibt die Summe den Cos n.B.

Man suche die Differenz dieser Potenzen, und dividire durch $2\sqrt{-1}$, so ist die Differenz der Sin n B. Nach seiner Anweisung ist also

$$\text{Cos } nB = \frac{(\text{Cos}B + \text{Sin } B\sqrt{-1})^n + (\text{Cos}B - \text{Sin}B\sqrt{-1})^n}{2}$$

$$\text{Sin } n B = \frac{(\text{Cos}B + \text{Sin}B\sqrt{-1})^n - (\text{Cos } B - \text{Sin } B\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}.}$$

Man entwickle diese Formeln, um Sin und Cos 7 B zu finden, und man wird sich überzeugen, daß diese Methode viel schwerer sey, und weit mehr Schreiberey erfordere, als die, welche oben gezeigt wurde. Im Grunde ist sie doch auch nichts anders, als eine mechanische Methode, das Gesetz zu bestimmen, nach welchem die Glieder der Sinuse und Cosinuse der Multiplen eines Winkels mit einander verbunden werden.

Gesetzt es werde eine Methode verlangt, die Tangenten von 2A, 3A, nA ohne vieles Rechnen zu bestimmen; so erhebe man die Größe 1 + Tang A zur nten Potenz, schreibe 1 und alle geraden Glieder zum Nenner, die

die ungeraden zum Zähler, und verbinde selbe abwechselnd durch die Zeichen + —. Es sey die Tangente des 7fachen Winkels A zu suchen, so ist

$$(1 + \text{Tang} A)^7 = 1 + 7 \text{Tang} A + 21 \text{Tang}^2 A. + 35 \text{Tang}^3 A + 35 \text{Tang}^4 A. + 21 \text{Tang}^5 A + 7 \text{Tang}^6 A. + \text{Tang}^7 A.$$

also ist

$$\text{Tang}\, 7 A = \frac{7 \text{Tang} A - 35 \text{Tang}^3 A + 21 \text{Tang}^5 A - \text{Tang}^7 A}{1 - 21 \text{Tang}^2 A + 3 \text{Tang}^4 A - 7 \text{Tang}^6 A.}$$

Eben diesen Ausdruck findet man auch, wenn man sich des Zeichens $\sqrt{-1}$ bedienet, aber die Entwickelung ist viel schwerer, und fordert weit mehr Zeit.

Ein ferneres Beyspiel ist folgendes:
Man lehrt im Differential-Calcul

daß, $\text{Cos}\, z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1 \ldots 4} - \frac{z^6}{1 \ldots 6} + \frac{z^8}{1 \ldots 8} \ldots .$

und $\text{Sin}\, z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1 \ldots 5} - \frac{z^7}{1 \ldots 7.} \ldots \ldots$

Eben so versichert man uns, daß, wenn e das Grundverhältniß des hyperbolischen Logarithmen-Sistems ist,

$$\frac{e + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1 \ldots 4} + \frac{z^6}{1 \ldots 6} + \frac{z^8}{1 \ldots 8} \ldots$$

$$\frac{e_z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1 \ldots 5} + \frac{z^7}{1 \ldots 7} \ldots \ldots$$

sey.

Diese Reihen haben eine Aehnlichkeit mit den obigen für den Sinus und Cosinus des Bogens z. Um

also

also diese letzteren in die Obigen zu verwandlen, substituirt man für z, $z\sqrt{-1}$, und findet

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1\ldots4} - \frac{z^6}{1\ldots6} + \frac{z^8}{1\ldots8} \ldots$$

also ist $\text{Cos } z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

Nun ist Cos z eine bestimmte, wahre und wirkliche Größe, $e^{z\sqrt{-1}}$, $e^{z-\sqrt{-1}}$ unmögliche Größen, also folgt aus dieser Gleichsetzung, daß eine wirkliche Größe die Summe zweyer unmöglichen Größen seyn könne.

Wozu führt uns aber diese widersinnige Operation? Zu einigen Reihen, die man durch Integriren eben so leicht finden kann. Man findet z. B. das Verhältniß des Bogens Z zur Tangente dieses Bogen durch eine Reihe ausgedrückt. Es wird nämlich

$$Z = t - \tfrac{1}{3} t^3 + \tfrac{1}{5} t^5 - \tfrac{1}{7} t^7 \ldots + \tfrac{1}{9} t^9$$

Allein eben diese Reihe findet man durch integriren. Man weiß nämlich, daß nach den Grundsätzen des Differential-Calculs das Differential der Tangente sich zum Differentiale des Bogens, wie das Quadrat der Secanten zum Radius verhalte, somit ist:

$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$. Man verrichte die Division, so hat man

$$dz = dt.\ 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 \ldots\ldots$$

Man integrire, so wird

$$Z = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \ldots\ldots$$

Man

Man wird einwenden, daß, da die Rechnung mit dem Zeichen der Unmöglichkeit, und die Differential-Rechnung gleiche Resultate geben, die verwerfliche nnd unsinnige Rechnungs-Art doch zuverläßig sey. Allein zuerst ist es doch immer absurd, in die Geometrie sinnlose Zeichen ohne Noth einzuführen, und dann ist noch zu untersuchen, ob denn die Resultate des Differential-Calculs geometrisch richtig seyen.

Vom Unendlichen.

Die Rechnung mit dem Unendlichen ist eben so ungereimt, als die mit dem Unmöglichen. Der Begriff des Unendlichen hat sich durch einen Mißverstand in die Geometrie eingeschlichen. Man hat nämlich die Vorstellung der Nicht-Existenz mit der unendlichen Existenz verwechselt. Wenn der Cosinus des Winkels null, das ist der Winkel 90 Grade wird; so ist die zu diesem Winkel gehörige Secante $\frac{1}{0}$, das ist, es giebt keine Secante in diesem Falle. Unsere Geometer erklären diese Zeichen-Verbindung durch den Ausdruck einer unendlichen Secante. Allein es ist ein großer Unterschied zwischen der Verneinung des Endlichen, und zwischen Etwas Unendlichen. Daraus, daß man verneint, daß in gewissen Fällen eine Bestimmung möglich sey, folgt nicht, daß Etwas unbestimmbares existire. Etwas unbestimmbares ist ein Widerspruch in Terminis. Das Unendliche ist unbestimmbar; was unbestimmbar ist, ist keiner Verhältnisse fähig, und wir fallen, wenn wir ein Unendliches annehmen, in ein Gewebe von Wiedersprüchen, aus denen wir uns nicht herauszuhelfen vermögen. Wenn $\frac{1}{0}$ = dem Unendlichen = ∞ ist:

so ist $\frac{1}{-1}$; $\frac{1}{-2}$ $\frac{1}{-3}$ mehr als das Unendliche; denn unsere Geometer lehren uns ja, daß -1 weniger als 0 sey. Wir haben dann ganze und halbe Unendliche, Quadrate und Potenzen von Unendlichkeiten, lauter Worte, denen kein Begriff entspricht.

Alles Endliche wird dann nicht in Vergleichung mit dem Unendlichen, sondern für sich selbst null. Wenn $\mathrm{Sec}\,A = \frac{1}{0}$ ist: so ist die $\mathrm{Tang}\,A = \frac{\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Cos}\,A} = \frac{1}{0}$. Allein es ist immer, $\mathrm{Cos}\,A$ mag so klein werden, als es will, $(\mathrm{Sec}^2 A - 1) = (\mathrm{Tang}^2 A)$. Da nun $\mathrm{Sec}^2 A = \mathrm{Tang}^2 A$: so ist entweder $-1 = 0$; oder wir haben ein Unendliches, dessen Quadrat kleiner ist, als das andere unendliche Quadrat.

Was vom Unendlich-Großen gesagt wurde, ist auch vom Unendlich-Kleinen wahr. Es gibt kein Mittelding zwischen dem, was ist, und zwischen Nichts. Es sind also auch die unendlich kleinen dx, dy Zeichen, denen nichts entspricht.

Schon lange haben mehrere Geometer den Nonsense des Unendlichen eingesehen, und haben daher gewünschet, daß unsere Archimedes suchen möchten, die Regeln des Differential- und Integral-Calculs auf festere Grundlagen zu bauen. Es hat auch nicht an Versuchen gefehlt, dieses zu leisten. Sie sind aber nicht sehr glücklich gewesen. Man hat dem Begriffe des Unendlichen andere substituirt, die eben so ungeometrisch sind. Ich kann mir keine Grenzen von Verhältnissen zwischen zwey Größen denken, welche erst dann eintreten, wenn die

im

im Verhältnisse stehenden Größen Null werden. Auch diese schwindenden Verhältnisse sind Worte ohne Sinn.

Andere Geometer haben versucht, den ganzen Differential-Calcul auf mechanische Operationen zu reduciren, bey denen man gar nichts denkt, und nur die Finger bewegt. Andere mögen sich damit begnügen, und eine Freude daran finden, mit der Feder im Nebel der f, f′, f″ herum zu fahren. Durch dieses französische Machwerk ist die Wissenschaft nicht erweitert worden. Unsere Begriffe haben lediglich nichts an Deutlichkeit und Bestimmtheit gewonnen.

Auf diesen Wegen scheint es mir unmöglich den Differential-Calcul zur Würde einer geometrischen Rechnungs-Methode zu erheben. Der Unwille über dieses unvernünftige Tatoniren hätte mir die ganze höhere Geometrie verhaßt gemacht; wenn mir nicht ein schwacher Schein entgegen leuchtete, auf einem anderen Wege etwas zur Begründung dieser Wissenschaft beytragen zu können.

Ich betrachte nämlich den Differential-Calcul als eine Regula falsae positionis, vermöge welcher man den Fehler der Differentiation durch den Fehler der zweyten Position so vollkommen aufhebt, daß das Resultat genau dasselbe wird, was man durch streng geometrische Methoden findet. Um dieses deutlich einzusehen, wollen wir den Differential-Calcul auf die Kegelschnitte anwenden.

Es sey in der Parabel $AL = x$, $EL = y$, (Fig. 5.) somit $px = y^2$. $LB = dx$, $CD = dy$. Es sey ferner FL die Subtangente. Nach der Theorie der Parabel ist, wenn man CG mit der Tangente EF parallel

zieht,

zieht, $EK = \frac{CD^2}{p} = \frac{dy^2}{p}$. Wenn man in die Gleichung $px = y^2$ für x, $x + dx$ für y, $y + dy$ schreibt: so hat man

$$y^2 + 2ydy + dy^2 = px + pdx.$$

Also $2ydy + dy^2 = pdx$.

Wenn man aber differentirt: so hat man

$$2ydy = pdx.$$

Also gibt dies Differentiren das $ED = dx$ um $\frac{dy^2}{p}$, oder um EK zuklein.

Allein nun sagt man:

$$dy : dx = EL : LF.$$

Auch diese Proportion ist falsch, denn es kann nie $CD : DE = EL : LF$ seyn, man mag CD und DE so groß oder so klein nehmen, als man will; sondern es ist $CD : DK = EL : LF$. Nun substituirt man aber für dx seinen durchs Differentiren gefundenen Werth, der gerade um soviel zu klein ist, als dx zu groß, da wird demnach

$$dy : \frac{2ydy}{p} = EL : LF = y : LF$$

also: $1 : \frac{2y}{p} = y : LF$. Also ist durch die genaue Compensation der Fehler, $LF =$ Subtangente $= \frac{2y^2}{p} = 2x$.

Eben so ist es im Kreise, dessen Radius $= a$ seyn mag. Es sey ferner $DA = x$; $BA = y$; $HB = dx$, $GH = dy$; so ist $y^2 = 2ax - x^2$, und das vollstän-

ständige Differential $= 2\,ydy + dy^2 = 2(a-x)dx - dx^2$. Also: $dx = \frac{ydy}{a-x} + \frac{dx^2 + dy^2}{2(a-x)}$

Es ist ferner $CA : AB := GH : HJ$ oder $a-x : y = dy : HJ$, somit $HJ = \frac{ydy}{a-x}$.

Folglich $BJ = \frac{(a-x)\,dx - ydy}{a-x}$.

Substituirt man aus der Differenzial-Gleichung den Werth von $(a-x)\,dx$, so findet man $BJ = \frac{dx^2 + dy^2}{2(a-x)}$.

Differentirt man aber nach der gewöhnlichen Regel die Gleichung

$$y^2 = 2ax - x^2: \text{ so ist}$$
$$ydy = (a-x)\,dx, \text{ und}$$

somit $dx = \frac{ydy}{a-x}$. Nach der genauen Differential-Gleichung ist also dx um $\frac{dx^2 + dy^2}{2(a-x)} = BJ$ zu klein.

Nun setzt man
$dy : dx = BA : AE = y : AE$ der Subtangente. Dieses Verhältniß ist falsch, denn es ist $GH : HJ = BA : AE$, nun ist HJ um $BJ = \frac{dx^2 + dy^2}{2(a-x)}$ kleiner, als dx oder HB; allein man substituirt für dx den durch die gewöhnliche Differential-Gleichung gefundenen Werth von dx, der gerade um $\frac{dx^2 + dy^2}{2(a-x)}$ zu groß ist; also compensiret auch hier der Fehler der Differential-Gleichung genau den Fehler des unrichtigen Verhältnisses.

So ist es gerade auch bey der Ellipse und bey der Hyperbel. Die Fehler compensiren sich genau, und somit erhält man nicht approximirte, sondern genaue Verhältnisse der Ordinate zur Subtangente. Es ist hiebey zu bemerken, daß es ganz und gar nicht auf die Größe von dx, dy ankomme. Sie können groß oder klein, endlich oder unendlich seyn. Der Differential-Calcul ist also nicht, wie Newton meint, eine Methodus ultimarum rationnm, quibuscum quantitates evanescunt. Auch nicht wie Euler lehrt: Methodus rationum, quos incrementa attingunt, cum plane in nihil abierint. Denn es sind keine ultimae rationes, weil immer noch eine ulterior gedacht werden kann, und die incrementa, quae in nihil abierunt, haben gar keine Verhältnisse; sondern es ist der Differential-Calcul eine Methode, falsch doch so zu rechnen, daß die Fehler compensiret werden.

Man bemerke ferner, daß dx^2 und dy^2 keine unendlich kleine Größen der zweyten Ordnung seyn, die man weglassen kann. Denn es ist gezeigt worden, daß

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2} = 2(a-x)\,dx - 2y\,dy$$ sey, welches eine Differential-Größe der ersten Ordnung ist.

Durch die Hinweglassung dieser Differentialen der zweyten Ordnung werden die Elemente aller Kegelschnitte zu Elementen der Parabel. Denn die Ordinate der Parabel ist . . . $= \sqrt{2ax}$
die des Kreises . . . $= \sqrt{2ax - x^2}$
die der Hyperbel . . . $= \sqrt{2ax + x^2}$
Nehme ich also x unendlich klein: so wird y ein Element der Curve. Läßt man dann x^2 als ein unendliches der zweyten Ordnung weg: so hat man lauter gleiche

Ele-

Elemente, und doch ist einleuchtend, daß der Kreis und die Hyperbel nicht gleiche Elemente haben können.

Es ist gezeigt worden, warum der Differential-Calcul richtige Resultate liefere, ungeachtet er von ganz irrigen Grundsätzen ausgehet. Es ist bewiesen worden, daß bey den Kegelschnitten die Fehler genau compensiret werden, wenn durch selben die Subtagente gesucht wird. Allein hat diese Compensation auch bey den übrigen Größen Statt, welche durch den Differential-Calcul gesucht werden? Hat sie Statt bey allen übrigen Curven von was immer für einer Art? Könnte dieses erwiesen werden, so wäre die Differential-Rechnung so gut, als irgend eine andere streng mathematische Methode. Allein es scheint dieser Beweis unmöglich, weil, was nicht ist, nicht erwiesen werden kann.

Untersuchet man die Methode der größten und kleinsten Applicaten, so kann Niemand, den keine Vorurtheile blenden, mißkennen, daß diese Methode ganz und gar nicht auf die letzten Verhältnisse schwindender Incremente gegründet sey. Es ist vielmehr offenbar, daß nach selber, das Verhältniß des einen Differentiales zum anderen, wie das Verhältniß der Einheit zum Unendlichen seyn müsse.

Die Größe $\frac{dy}{dx}$ kann nicht $= \frac{0}{0}$ sondern muß $= \frac{0}{1}$ gesetzet werden. Denn da der Nenner in allen diesen Formeln nie Null werden kann, so kann dx auch nicht Null werden.

Man setze, es werde gefordert, die größte Applicate des Kreises zu suchen. Man differentire die Gleichung

$y^2 = 2ax - x^2$, so hat man

$2ydy + dy^2 = 2(a - x)\,dx - dx^2$

 also:

also: $dy : dx = (a - x) - \frac{dx}{2} : y + \frac{dy}{2}$.

In diesem Verhältnisse kann ich die zwey ersten Glieder nicht zugleich = null setzen, denn sonst müßte auch das letzte Glied = 0 seyn. Es ist vielmehr offenbar, daß dx eben das Verhältniß zu dy haben müsse, das Null zu y hat; das ist, gegen dy unendlich groß seyn müsse. So ist es auch: Man suche den Sinus eines Sekunden-Winkels, und vergleiche ihn mit dem Sinus versus dieses Winkels. Hier ist also offenbar das schwindende Verhältniß der Differentialen das Verhältniß der Einheit zum Unendlichen. Das eine ist unendliche Male größer, als das andere, und doch Null. Darin liegt doch ein offenbarer Widerspruch. Man kann ohne Differentialen die Maxima und Minima für die Kegelschnitte finden, wenn man darauf Rücksicht nimmt, daß in dem Punkte der größten Applicaten die Cotangente und die Abscisse einander gleich seyen; allein wenn dieses bey den Kegelschnitten zutrifft, läßt sich daraus folgen, daß dieses bey allen Curven und jedem ihrer Punkte zutreffen müße? Ich wünsche, daß dieses erwiesen werden könne, denn alsdann kann man hoffen, daß man dem Differential-Calcul einen festen Grund zu legen im Stande seyn werde.

Wenn man die Curven quadriret, so wird dx = 1, und dx bedeutet (die Geometer mögen sich auch noch so sehr dagegen sträuben) die Breite einer Elementarfläche, deren Länge die Ordinate ist; denn wenn dieses Element = ydx ist, so kann $\frac{dS}{dx}$ nicht = y gesetzt werden, wenn nicht dx = 1 ist.

Um

Um die ganze Operation zu übersehen, wollen wir den Flächen Inhalt des Quadranten, dessen Radius a ist, ohne Differential-Calcul suchen.

Man kann den Kreis als die Summe einer unbestimmten Menge von Elementar-Flächen betrachten, deren Länge die Ordinate, und deren Breite die Einheit oder dx ist. Je größer man die Zahl dieser Flächen, je kleiner man die Einheit nimmt, desto näher kömmt man der Wahrheit; genau läßt sich aber dieser Inhalt nicht durch diese Methode bestimmen, weil die Summe aller dieser sehr schmalen Parallelogramen doch immer um etwas größer ist, als der genaue Inhalt des Quadranten.

Diese Flächen werden folgenden Werth haben:

$$1.\sqrt{a^2 - 1},\ 1.\sqrt{a^2 - 4},\ 1\sqrt{a^2 - 9},\ 1\sqrt{a^2 - 16}, \ldots\ 1\sqrt{a^2 - a^2}$$

Man verrichte die Wurzelausziehung; so ist:

$$\sqrt{a^2 - 1} = a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2.4a^3} - \frac{1.3}{2.4.6a^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8a^7}$$

$$\sqrt{a^2 - 4} = a - \frac{4.1.}{2a} - \frac{4^2.1}{2.4a^3} - \frac{4^3.1.3}{2.4.6a^5} - \frac{4^4 1.3.5}{2.4.6.8a^7}$$

$$\sqrt{a^2 - 9} = a - \frac{9.1}{2a} - \frac{9^2.1}{2.4a^3} - \frac{9^3.1\ 3}{2.4.6a^5} - \frac{9^4.1.3.5}{2.4.6.8a^7}$$

$$\sqrt{a^2 - 16} = a - \frac{16.1.}{2a} - \frac{16.^2 1}{2.4a^3} - \frac{16.^3 13}{2.4.6a^5} - \frac{16^4}{2.4.6.8a^7}$$

und so weiter. Man hat demnach a solche Reihen, deren Summe den Flächen-Inhalt aller dieser kleinen Parallelograme ist.

Summiret man diese Glieder verticaliter, so wird, wenn S die Summe bedeutet:

$S' = a^2.$

$$S'' = \frac{1}{2a} \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \ldots a^2)$$

oder

$$S'' = \frac{1}{2a} (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots a^2)$$

$$S''' = \frac{1}{2.4a^3} (1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 + \ldots a^4)$$

$$S^{IV} = \frac{1.3.}{2.4.6a^5} (1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 + \ldots a^6)$$

$$S^{V} = \frac{1.3.5}{2.4.6.8a^7} (1 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + \ldots a^8)$$

Diese Reihen zu summiren, hat man zwey Methoden. Senkrecht hat man geometrische Progressionen; in der horizontalen Richtung die Reihe der Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis a zu addiren, und zwar ist
S'' die Summe aller Quadrate der natürlichen Zahlen,
S''' die Summe aller Biquadrate derselben,
S^{IV} die Summe aller sechsten Potenzen,
S^{V} die Summe aller achten Potenzen.

Nun sind aus der Algebra die Formeln bekannt, welche diese Summen ausdrücken. Es ist nämlich:

$$S'' = \frac{a.a+1.2a+1}{2.3} = \frac{2a^3 + 3a^2 + 1}{2.3.}$$

$$S''' = \frac{(a.a+1.2a+1.)\,3a^2+3a-1}{5.6} = \frac{6a^5 + 15a^4 + 7a^3 + 3a - 1}{5.6}$$

und so weiter.

Nimmt

Nimmt man sich die Freyheit, nur die höchsten Potenzen dieser Ausdrücke in Rechnung zu bringen, und das übrige wegzulassen, so ist $S'' = \frac{a^3}{3}$, $S''' = \frac{a^5}{5}$ $S^{IV} = \frac{a^7}{7}$

$S^{V} = \frac{a^9}{9}$, und so weiter.

Diesem nach wäre die Summe aller Parallelogramen der Ordinaten, welche den Quadranten bilden, das ist:

Quadrans =

$$a^2 - \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{1.}{2.4a^3} \cdot \frac{a^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6a^5} \cdot \frac{a^7}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8a^7} \cdot \frac{a^9}{9} \ldots$$

$$\text{oder} = a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{1}{9} \cdot\right.$$

Diese Reihe ist vollkommen die, welche man findet, wenn man $\frac{dS}{dx} = y$ setzet; aus $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ die Wurzel auszieht, und dann integerirt, und endlich $x = a$ setzet.

Hieraus ist offenbar:

daß der Inhalt des Quadranten zu groß ausfalle, weil die Summe aller Parallelogramen immer größer ist, als der genaue Flächen-Inhalt; man mag die Einheit so klein nehmen, als man will, und weil man von den Summen der Potenzen alle Glieder wegläßt bis auf das erste.

Es ist ferner einleuchtend, daß die Segmente der Kreisfläche nicht in einem gleichförmigen Verhältnisse stehen, denn die Theile der Parallelograme, welche aus dem Kreise fallen, sind am Vertex größer als am Centrum.

Wir

Wir sehen endlich, was wir thun, wenn wir das Integral von $x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ setzen. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist nämlich die abbrevirte Summe der n Potenzen aller natürlichen Zahlen von 1 bis x. Dagegen man die Differenz der Summe der Potenzen aller natürlichen Zahlen von Eins bis x, und der Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis x — 1 findet, wenn man differentirt; denn es ist:

$$(1 + 2^n + 3^n + x. + x^n) - (1 + 2^n + 3^n \ldots x^{n-1}) = x^{n-1}$$

Die Anwendung dieser Bemerkungen auf die übrigen Kegelschnitte ist leicht. Es wird also die Integration nicht mehr, wie bis anhero, eine bloß mechanische Operation seyn, bey der die Kunst des Algebristen darin bestund, durch Tatoniren eine Äquation zu finden, welche wieder differentirt die gegebene Differential-Gleichung darstellt.

Das, was jedem selbstdenkenden Manne für den Differential- und Integral-Calcul Widerwillen einflößen muß, ist der blinde Mechanismus, mit dem man operiret. In manchen Fällen ist freylich die Manipulation leicht, und gewähret Resultate, die nicht vieles Kopfbrechens bedarfen; aber eben diese verführerische Leichtigkeit ist daran Schuld, daß die strenge Geometrie so geringe Vorschritte macht, und so unfruchtbar an neuen Verhältnissen ist.

Man findet den körperlichen Raum der Hyperbel, wenn man die Differential-Gleichung

$$\frac{dS}{dx} = \frac{b^2}{a^2} 2ax + x^2$$

in=

integriret; aber man operiret dabey ganz blind, und weiß nicht, warum man dieses Resultat findet. Allein weit deutlicher wird die Vorstellung, wenn man folgender massen verfährt.

Man verlängere eine rechtwinklichte Ordinate bis an die Assymptote in D Fig. 7., theile die Abscissen in viele kleine Theile, und ein solcher kleiner Theil sey die Einheit.

Man denke, ein solches Elementar Rektangel drähe sich um die Axe, so wird er einen Elementar-Cylinder bilden.

Die bis an die Assimptote verlängerte Abscisse ist $= \frac{b}{a} . x + a$. Die Ordinate selbst $= \frac{b}{a} . \sqrt{2ax + x^2}$. Der durch die verlängerte Ordinate gebildete Elementar-Cilinder ist also größer, als der, den die Ordinate bildet, und die Differenz gibt den assimptotischen Ring. Da also der Cilinder der verlängerten Ordinate $=$ $\frac{b^2}{a^2} (a + x)^2 . \pi . 1$; der Cilinder der Ordinate $=$

$\frac{b^2}{a^2} . (2ax + x^2) . \pi . 1$ ist, so ist der assimptotische Ring $= b^2 . \pi$, also der assimptotische Raum der zwischen dem Hyperboloid, und dem abgestumpften Kegel der Assimptoten liegt $= b^2 x . \pi$.

Addiret man hiezu den Kegel ABE $= \frac{b^2 . a . \pi}{3}$, so ist der körperliche Raum

ACEDFB .... $= \frac{b^2 . (3x + a) . \pi}{3}$.

Ziehet

Ziehet man diese Größe vom Kegel AD ab, so ist: $\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x+a)^3\pi}{3} - b^2\cdot\frac{(3x+a)\pi}{3} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(3ax^2+x^3)\pi}{3}$ der körperliche Raum des Hyperboloids.

Auf diese Art bemerket man die merkwürdige Eigenschaft der Hyperbel, daß nämlich gleich hohe assimptotische Ringe einander gleich seyen, und die assimptotischen Räume sich wie die Abscissen der Axe verhalten. Auch sieht man aus der Operation selbst, warum man gerade dieses und kein anderes Resultat erhalte; und in wie ferne man auf dessen Genauigkeit rechnen könne. Für Köpfe, welche das Denken scheuen, mag der Differential-Calcul in einigen Fällen Vorzüge haben; aber der Geometer, dem es um deutliche und bestimmte Begriffe zu thun ist, wird die schwerere Methode vorziehen, welche ihm dieselben gewähret.

Die Geometer lehren uns, daß der zwischen der Hyperbel und der Assimptote begriffene Raum, der natürliche Logarithmus der Abscisse sey. Dieses wollen wir untersuchen.

Es sey Fig. 7. eine rechtwinklichte Hyperbel, somit AC = CB = d, so ist nach der Natur der Hyperbel AE × EF = d^2, oder $xy = d^2$. Setzt man aber CE = z, so ist AE oder $x = d + z$, also $y = \frac{d^2}{d+z}$.

Man theile den Flächen-Raum der Assymptoten in unbestimmt sehr kleine Theile, und ein solcher Theil sey die Einheit, so wird die Summe der kleinen Parallelogramen CB12, 1234 ꝛc. nur um so viel größer seyn, als die äußeren Ecken betragen, welche durch die Krümung der Hyperbel abgeschnitten werden. Jedes dieser

Parallelo-

Parallelogramen ist also y. 1. Dadurch entstehet für den Raum CBEF folgende Reihe:

$$CBEF = d^2 \left[\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+4} \cdots \frac{1}{d+z}\right]$$

Diese Reihe soll nun der Logarithmus der Größe AE oder der Größe $d+z$, und d^2 die Potenz derselben seyn. Setzt man aber auch den Model des Systems $= 1$, also $d^2 = 1$, so wird

$$CBEF = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots + \frac{1}{z}$$

Allein unter diesen Voraussetzungen ist der

$$\log. 1 + z = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \cdots\cdots$$

Zwischen beyden Reihen ist nun nicht die mindeste Aehnlichkeit, und die Regeln des Differential-Calculs führen uns in diesem Falle ganz irre. Man wird diesen Irrthum leicht erkennen, wenn man sich erinnert, daß z ein unbestimmter Theil der Assimptote, und somit so groß genommen werden kann, als man will. Man setze $z = 1000$, so ist

$$\log: 1 + 1000 = 1000 - 500000 + \frac{1000}{3} \text{ Millionen}$$

das ist, eine Reihe, die nicht sehr schnell convergirt, und auf die ungereimtesten Resultate führet. Sie kann nie die Summe aller vom Nenner 1 bis 1000 fortlaufenden Fraktionen seyn.

Man kann den Flächen-Inhalt der Hyperbel auf eben die Art finden, wie wir oben den Flächen-Inhalt des Kreises gefunden haben, allein das Resultat ist auch ganz von dem verschieden, das man in unseren Büchern findet.

Es

Es sey (vid. Fig. 12.) eine recht winklichte Hyperbel, so ist, wenn man $AC = a$, $CE = x$, $EF = y$ setzet:

$$y^2 = a^2 + x^2.$$

Es sey nun der Flächen-Raum CAFHMLC zu quadriren, so theile man in Gedanken die Größe $CL = x$ in so viele kleine Theile, als man will. Einen solchen Theil betrachte man als die Einheit und die Breite eines kleinen Parallelograms, dessen Länge die Ordinate ist. Der Flächen-Inhalt wird der Summe aller dieser Parallelogramen um so näher kommen, als man die Einheit kleiner nimmt.

Es wird also: $1.\, EF = \sqrt{a^2 + 1}$; $1.\, KH = \sqrt{a^2 + 4}$, und so weiter, folglich ist auch

$$1.EF = \sqrt{a^2 + 1} = a + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2.4.a^3} + \frac{1.3.}{2.4.6.a^5} \ldots\ldots$$

$$1.KH = \sqrt{a^2 + 4} = a + \frac{1.4.}{2.a} - \frac{1.4^2}{2.4.a^3} + \frac{1.3.4^3}{2.4.6.a^5} \ldots\ldots$$

$$1.LM = \sqrt{a^2 + 9} = a + \frac{1.9}{2.a} - \frac{1.9^2}{2.4.a^3} + \frac{1.3.9^3}{2.4.6.a^5} \ldots\ldots$$

und so weiter.

Summiret man von oben herab von 1 bis x, so hat man

$$S = ax$$

$$S' = \frac{1}{2a} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots\ldots x^2)$$

$$S'' = \frac{1}{2.4.a^3} (1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 + \ldots\ldots x^4)$$

$$S''' = \frac{1.3}{2.4.6a^5} (1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 + \ldots x^6)$$

Ver-

Verfährt man also wie bey dem Kreise gezeigt wurde, so ist

$$AFGHLM = ax + \frac{x^3}{2.3a} - \frac{x^5}{2.4.5a^3} + \frac{x^7.1.3}{2.4.6.7.a^5} - \frac{1.3.5.x^9}{2.4\,6.8.9a^7} \ldots$$

Nun ist der Raum AUM gleich dem Rektangel CLMU — AFJHMLC $= x\sqrt{a^2+x^2}$ — AFHMLC.

Man verrichte die Wurzelausziehung, so ist

$$x\sqrt{a^2+x^2} = ax + \frac{1.x^3}{1.2.a} - \frac{1.x^5}{2.4.a^3} + \frac{1.3x^7}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5x^9}{2.4.6.8.a^7} + \ldots$$

Von dieser Reihe ziehe man die obere ab, so ist

$$AUM = \frac{1.x^3}{3a} - \frac{1.x^5}{2.5.a^3} + \frac{1.3x^7}{2.4.7.a^5} - \frac{1.3.5x^9}{2.4.6.9.a^7} + \ldots$$

Diese Reihen haben, wie alle übrigen dieser Art, den Fehler, daß sie nicht mehr convergiren, wenn x größer als a wird.

Ich wünschte, daß unsere Geometer, die mehr Muse haben als ich, diesen Gegenstand genauer zu prüfen, sich die Mühe nähmen, ihre Rechnungen und die Gründe derselben genauer zu durchgehen. Ich weiß wohl, daß dieses eine sehr vermessene Forderung an die Eigenliebe unserer Geometer ist. Der Differential-Calcul, sagte Maupertuis zum Könige von Preußen, ist, wie das Geheimniß der Freymaurer. Man muß in selben eingeweihet seyn, um zu wissen, was das Ding ist; allein so wie die eingeweihten Freymaurer, weil sie sich schämen zu bekennen, daß dieses Geheimniß des Aufbewahrens nicht werth ist, so erlaubt auch die Eigenliebe nicht, daß die, welche sich den Kopf mit der Transzendental-Rechnung zerbrochen haben, gestehen, daß diese mühsam erlernte Wissenschaft von Irrthümern und falschen Anwendungen strotze. Man

Man mißverstehe mich nicht. Durch diese Beobachtungen wird kein evidender Grundsatz der Mathematik angefochten. Es ist allerdings erweislich und erwiesen, daß, wenn auf einer Assimptote vier Abscissen, die in geometrischer Proportion wachsen, genommen werden, und von selben aus, vier Ordinaten mit der anderen Assimptote Parallel gezogen werden, die zwischen der ersten und zweyten, dann der dritten und vierten liegenden krumlinigten Trapezlen einander gleich seyen. Nur die daraus gezogenen Folgerungen, und die hierauf gegründeten Operationen des Transzendental-Calculs scheinen mir einleuchtend falsch.

Man könnte für den assimptotischen Flächenraum zwar auch die bey dem Kreise gezeigte Methode gebrauchen;

und da $y = \frac{d^2}{d+z} = d^2 (\frac{1}{d} - \frac{z}{d^2} + \frac{z^2}{d^3} + \frac{z^3}{d^4} \ldots\ldots$

oder $y = d. (1 - \frac{z}{d} + \frac{z^2}{d^2} - \frac{z^3}{d^3} + \frac{z^4}{d^4} \ldots\ldots$

ist, so wird die Summe aller Ordinaten gefunden, wenn man die Reihen summiret, die entstehen, wenn z nach und nach $= 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots z$ gesetzt wird.

Es wird demnach, wenn S den Flächen-Inhalt bedeutet:

$$S = d\,(1 - \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d^3} + \frac{1}{d^4} - \frac{1}{d^5} \ldots\ldots$$

$$+ d\,(1 - \frac{2}{d} + \frac{4}{d^2} - \frac{8}{d^3} + \frac{16}{d^4} - \frac{32}{d^6} \ldots)$$

$$+ d\,(1 - \frac{3}{d} + \frac{9}{d^2} - \frac{27}{d^3} + \frac{81}{d^4} - \frac{243}{d^5} \,.\,.)$$

$+ d\,(1 -$ ꝛc. ꝛc.

Also

Also ist die Summe der Glieder der ersten Colonne, wenn z die Zahl der kleinen Parallelograme bedeutet $= dz$. Die Summe der zweyten Colonne ist gleich der Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis $z = \frac{z . z+1}{2d} = \frac{z^2}{2d}$, wenn man $\frac{z'}{2d}$ wegläßt.

Die Summe der dritten Colonne ist $= \frac{2z^3+3z^2+z}{2.3d^2}$

$= \frac{z^3}{3d^2}$, wenn man $\frac{3z^2+z}{2.3d^2}$ wegläßt.

Die Summe der vierten Colonue ist die Summe der Würfel aller natürlichen Zahlen von 1 bis $z = \frac{z^2.(z+1)^2}{4d^3} = \frac{z^4}{4d^3}$, wenn man auf eben diese Art verfährt; und so weiter.

Es ist also:

$$S = dz(1 - \frac{z}{2d} + \frac{z^2}{3d^2} - \frac{z^3}{4d^3} + \frac{z^4}{5d^4} - \frac{z^5}{6d^5} \ldots .)$$

Man sieht also auch hier, daß die Summe dieser alternirenden Reihe nur dann ein vernünftiges Resultat gebe, wenn z gegen d sehr klein ist, sonst entfernet sich diese Reihe von der Wahrheit, je länger sie fortgesetzet wird.

Die Theorie der Krümmung bedarf ebenfalls einer Revision und einer Berichtigung. Es ist eigentlich nicht sehr deutlich bestimmt, welcher Kreis der Krümmungskreis sey. Ich glaube, zeigen zu können, daß sich in diese Bestimmung mehr als ein Irrthum eingeschlichen habe. Man weiß, daß zwey verschiedene

Kreise

Kreise nur zwey Durchschnitts - oder gemeinschaftliche Punkte haben können. Haben zwey Kreise drey gemeinschaftliche Punkte, so sind sie derselbe Kreis. Zwey Kreise, die sich berühren, können nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Aber ein Kegelschnitt und ein Kreis können 3, 4, 5 und 6 gemeinschaftliche oder Durchschnitts - Punkte haben. Man denke sich drey gleichweit von einander abstehende Punkte einer Parabel, so kann durch diese drey Punkte ein Kreis geleget werden, und dieser Kreis kann den andern Schenkel in zwey Punkten schneiden. Man stelle sich vor, daß beyde Punkte sich dem mittleren gleichförmig nähern, und ihm endlich so nahe kommen, daß ihre Entfernung nur noch denkbar ist, so wird der Kreis, der durch diese drey Punkte geht, der Krümmungskreis zum mittleren Punkte seyn. Offenbar muß der Krümmungskreis mehr als zwey gemeinschaftliche Punkte am Krümmungskreise haben; denn zwey gemeinschaftliche aneinander liegende Punkte kann jeder Kreis haben.

Die Distanz der Endepunkte zweyer gleich großen Sehnen bestimmt die Krümmung. Sind die Sehnen ab, bc, cd (Fig. 8.) gleich, so bestimmt das Verhältniß von ac zu bd die Krümmung. Ist ac = bd, so liegen alle vier Punkte in einem Kreise. Ist bd > als ab, so muß der Kreis, der durch die Punkte b, c, d gehet, größer als der seyn, der durch die Punkte a, b, c gehet, und umgekehrt.

Ist eine Menge solcher gleicher Sehnen auf einer Curve genommen, und ihr zugehöriges bd wächst immer, ohne je abzunehmen, so hat die Curve fortlaufende Schenkel. Nimmt bd in bestimmten Verhältnisse zu, und dann in eben dem Verhältnisse ab, so ist

sie

sie eine in sich selbst zurückkehrende Linie. Denkt man sich die Punkte a, b, c, d ꝛc. unendlich nahe, so ist der Krümmungskreis der, welcher durch die drey aneinander liegende Punkte gehet. Er wird bey jedem Punkte größer, wenn ac größer; kleiner, wenn ac kleiner wird.

Nur im Kreise stehet der Radius auf der Tangente senkrecht. Denn gesetzt, daß der Natur der Curve gemäß AE (Fig. 9.) sich in AF verwandeln müßte, so ist offenbar AF mit der Tangente zum Punkte B nicht parallel, und der auf AF senkrecht stehende Radius der Krümmung kann somit nicht auf der Tangente senkrecht stehen. Nur im Vertex irgend einer Curve, die nicht der Kreis ist, kann der Radius der Krümmung auf der Tangente senkrecht stehen.

Es ist ferner einleuchtend, daß keine Curve mit einer anderen, an demselben Punkte dieselbe Krümmung haben könne, wenn auch den beyden Curven dieselbe unveränderliche Größe gemein ist.

Es sey 2r der Diameter eines Kreises, und zugleich der Parameter einer Parabel und die Axe einer recht winklichten Hyperbel, die im Vertex zusammenstossen, so können sie nicht am Vertex gleiche Krümmungen haben. Es sey x die gemeinschaftliche Abscisse aller drey Curven, so sind die zu dieser Abscisse zugehörigen Ordinaten

für den Kreis $= \sqrt{2rx - x^2}$

für die Parabel $= \sqrt{2rx}$

für die Hyperbel $\sqrt{2rx + x^2}$

Also hat bey jeder dieser drey Curven ein ganz verschiedenes Verhältniß der Sehne zum Sinus versus Statt. Um sich sinnlich davon zu überzeugen, braucht man

man nur einen Blick auf die Figur (Fig. 10.) zu werfen. Man mag AB so klein nehmen, als man will, so ist immer AE die Ordinate der Parabel größer als AC die Ordinate des Kreises, und AF die Ordinate Hyperbel größer als die Ordinate der Parabel: folglich muß auch der Radius des Kreises, der durch die Punkte HB gehet, größer seyn, als der Kreis, dessen Radius $= r$ ist.

Unsere Lehrer weichen von diesen Grundsätzen ab. Sie behaupten:

1mo. daß in allen Curven der Radius der Krümmung senkrecht auf der Tangente stehe, und daß

2do. der Kreis, dessen Durchmesser $= 2r$ ist, sowohl für die Hyperbel als für die Parabel der Krümmungskreis am Vertex sey. Dieses ist als geometrischer Lehrsatz unerwiesen und offenbar falsch. Höchstens kann man unter diesen Voraussetzungen den Krümmungskreis approximative bestimmen. Allein bey diesen Bestimmungen erlaubt man sich so viele Approximationen, daß das endliche Resultat ganz gewiß fehlerhaft werden muß, wenn sich nicht die Fehler compensiren.

Man sollte glauben, daß, wenn man sich mit geometrischen Größen so große Freyheiten erlaubt, dadurch wenigstens die Berechnung erleichtert werden dürfte. Allein so ist es nicht. Die Auffindung des Radius des Krümmungskreises ist eine der schwersten Rechnungs-Operationen des Differential-Calculs. Man braucht hierzu die Differentialen der Differentialen, und da die Differentialen schwindende Verhältnisse seyn sollen, so sind die Differentialen der Differentialen gleichsam die Nichts der Nichts.

Wenn

Wenn ein Irrthum durch die Bemühungen der Gelehrten zum Systeme gemacht worden ist, so wird er auch mit Dornen so umwickelt, daß man sich nur mit Mühe dem Orte nähern kann, wo er liegt. Wagt es Jemand durch diese Dornen zu brechen, welches Auge kann ihn auf dem krummen Irr-Pfade folgen, der dahin führt? Nur solche Männer können es, denen die Evolutionen mit den Differentialen geläufig sind, und diese fechten für ihr mühsam erlerntes Machwerk wie pro aris et focis. Keiner unserer mir bekannten Geometer ist ein Metaphysiker. Dieses ist einleuchtend, wenn man ihre Werke liest. Keinem kann man also beweissen, daß die von ihm angenommenen Verhältnisse widersprechend seyen. Ihr Verstand ist an die mechanischen Operationen mit Zeichen ohne Sinn unauflößlich gebunden, und es wäre vergebliche Mühe, zu versuchen, sie nach methaphysischen Grundsätzen zu überzeugen, daß ihre Resultate Undinge seyen.

Ich werde demnach einen anderen Weg einschlagen, und zeigen, daß die Resultate der Differential-Rechnung ganz und gar nicht von der Größe oder Kleinheit der Differentialen abhangen, sondern eben dieselben seyen, man mag dx, dy unendlich groß oder klein annehmen.

Es werde gefodert, in der Ellipse den Krümmungskreis zum Punkte A zu bestimmen. (Fig. 11)

Es sey die halbe große Axe $= a$, die halbe kleine Axe $= b$; da der Punkt A gegeben ist, so kennt man die Tangente AK, den Diameter $AC = f$, den coordinirten Diameter $CG = g$. Man ziehe eine zum Diameter CG und der Tangente parallele Ordinate ML, so ist AE die Abscisse $= x$, $ME = EL$ sey $= y$, folglich:

$$\frac{g^2}{f^2} \cdot (2fx - x^2) = y^2$$

Man ziehe ferner die Perpendikularen AN = FE, und CD.

Nun ist $CD = \frac{ab}{g}$, folglich ist

$$FE = AN = \frac{ab}{fg} \cdot x.$$

Da der Winkel AEL spitz, der Winkel MEL stumpf ist, so ist die Sehne AL kleiner als die Sehne MA. Kein Kreis, dessen Mittelpunkt in der auf der Tangente senkrechten Linie AH liegt, und durch die Punkte A und L gehet, kann also auch durch den Punkt M gehen, so klein man auch AE nimmt.

Man mache AR = AL; so muß der Krümmungskreis nothwendig auf der Sehne LR senkrecht stehen. Nun kann LR niemals mit ML parallel seyn, man mag AL so klein nehmen, als man will; also kann auch der Radius der Krümmung bey A nicht auf der Tangente senkrecht seyn, sondern muß näher an AC liegen. Jene Größe, die man durch den Differential-Calcul mühesam, als den Diameter der Krümmung herausrechnet, findet man aus der Gleichung auf folgende Art. Es ist nämlich

$$y^2 = \frac{g^2}{f^2} \cdot (2fx - x^2.)$$

Man lasse x^2 weg, so ist:

$$y^2 = 2\frac{g^2}{f} \cdot x$$

Man

Man dividire y^2 durch $AN = \frac{ab}{fg} \cdot x$,

so ist Diameter Curv. $= \frac{2g^3}{ab}$.

Diese Größe ist gerade die, welche durch den Differential-Calcul gefunden wird. Was hat man aber gethan, um das gleiche Resultat zu finden? Man hat

1mo. durch die Addition des x^2 das Element der Ellipse zum Elemente einer Parabel gemacht.

2do. Hat man AN für den Sinus versus des Bogens LR gelten lassen, welcher offenbar kleiner als AN ist.

Es ist einleuchtend, daß man nicht sagen könne, die Richtigkeit der Rechnung hänge von der Größe des x ab, und treffe erst dann genau zu, wenn man x unendlich klein nimmt; denn das Resultat bleibt dasselbe, man mag x unendlich groß oder unendlich klein setzen.

Was die meisten Menschen verführet, ist ein Sophism, das man nicht besser als dadurch widerlegen kann, daß man es parodiret, und zeigt, daß es auf ein offenbar irriges Resultat führet. Wenn, sagt man uns, zwey veränderliche, in verschiedenen Verhältnissen abnehmende Größen sich bey allen ihren Veränderungen einem bestimmten Verhältnisse immer näheren, so ist ihr letztes Verhältniß das Verhältniß der Gleichheit mit dem Verhältnisse der unveränderlichen Größen. Wir wollen uns dieses Satzes bedienen, um die Oberfläche der Kugel zu bestimmen.

Man theile (Fig. 15.) den Radius SC = r in eine beliebige Anzahl von Theilen, und ziehe die Parallelen GB, HD, LO 2c. Setzt man, diese kleinen Rektangeln,

die alle gleiche Höhen haben, drähen sich um die Axe CS, so wird ihre äusserste Seite die Oberfläche eines kleinen Cilinders beschreiben, dessen Höhe AB = BD = DO ꝛc. die Halbmesser GB, HD, LO ꝛc. seyn werden.

Es ist einleuchtend, daß die Oberfläche der Kugel größer sey, als die Summe der Oberflächen aller dieser kleinen Cilinder, aber ebenfalls unläugbar, daß dieser Unterschied immer unbeträchtlicher werde, je kleiner man die Höhe des Elementar-Cilinders annimmt; und folglich schwinden müsse, wenn man diese Höhe als unendlich klein betrachtet.

Es bedeute π den gewöhnlichen Ausdruck der Periphèrie; 1 sey die Höhe eines kleinen Cilinders; und diese Einheit mag man sich so klein denken, als man will, so wird die Summe dieser Einheiten immer = CS = r seyn. Es ist demnach GB = $\sqrt{r^2 - 1}$, HD = $\sqrt{r^2 - 4}$ LO = $\sqrt{r^2 - 9}$, und so weiter; also ist die Summe aller Oberflächen der Cilinder

$$= 1 . \pi(\sqrt{r^2-1}) + (\sqrt{r^2-4}) + (\sqrt{r^2-9} \ldots + \sqrt{r^2-r^2})$$

Verrichtet man die Wurzelausziehung; so ist:

$$\sqrt{r^2-1} = r - \frac{1}{2r} - \frac{1}{2.4r^3} - \frac{1.3.}{2.4.6r^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8r^7}$$

$$\sqrt{r^2-4} = r - \frac{2^2}{2r} - \frac{2^4}{2.4r^3} - \frac{2^6.1.3}{2.4.6r^5} - \frac{2^8 1.3.5}{2.4.6.8r^7}$$

$$\sqrt{r^2-9} = r - \frac{3^2}{2r} - \frac{3^4}{2.4r^3} - \frac{3^6.13.}{2.4.6r^5} - \frac{3^8.1.3.5}{2.4.6.8r^7}$$

und so weiter.

Summiret man diese Glieder von oben herab, und verfährt wie oben beym Kreise gezeigt wurde, so ist die Summe aller Glieder, (man mag die Einheit so klein nehmen, als man will, und folglich so viel Wurzel-Reihen summiren, als man will.)

$$\pi(\sqrt{r^2-1}+\sqrt{r^2-4}+\sqrt{r^2-9}\ldots\ldots+\sqrt{r^2-r^2}.=$$

$$\pi r^2\left(1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.4.6}-\frac{1.3}{2.4.6.7}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}\ldots\ldots\right.$$

Dieses wäre somit der eigentliche Werth der Oberfläche der Kugel. Nun weiß man aber, daß diese Oberfläche $=\pi r^2$ sey, also ist offenbar, daß, wenn auch richtig ist, daß sich die Summe der Oberflächen der kleinen Cilinder der Oberfläche des Kreises immer nähert, sie dennoch nie der Oberfläche, und ein unendlich kleiner Sinus nie einer unendlich kleinen Sehne gleich gesetzt werden können.

Dieses mag hinreichen, um zu zeigen, auf welchem schwankenden Grunde die Differential-Rechnung gebauet ist.

Von den Logarithmen der negativen und unmöglichen Größen.

Ich komme auf eine Controvers, wo Bernoully und Alembert gegen Leibnitz und Euler stehen, und die eben nicht vorzüglich zur Ehre der Mathematik gereicht. Schon darum, daß die Geometer nicht einerley Meinung sind, ist zehen an eines zu wetten, daß sie in den Prinzipien nicht einig seyen; allein man sollte doch glauben, daß Männer von so großen Ruhme ihre Gründe mit Scharfsinne vertheidigen, und zuletzt von selbst auf

den ersten Grundsatz gekommen seyn würden, dessen Doppelsinn das Mißverständniß veranlaßt hat. So ist es aber nicht. Ich habe mit Ungeduld und Unwillen die Streitschriften gelesen, und leider gefunden, daß keiner, auch nicht Karsten, der Eulern beytritt, auf deutliche Grundsätze, welche allen Zweifel beseitigen, seine Meinung gefaßt hätte. Die Streitfrage ist noch heut zu Tage eben so unausgemacht, als sie vor hundert Jahren war.

Ich müßte ein sehr großes Buch schreiben, das wenige verstehen, und noch wenigere lesen würden, wenn ich alle Gründe der uneinigen Geometer prüfen und würdigen wollte. Keiner ist soweit zurückgegangen, daß er auf die Quelle des Irrthums gekommen wäre. Ich werde suchen, mich so kurz als möglich zu fassen, um meinen Lesern die Mühe viel zu lesen, mir die Mühe viel zu schreiben, zu ersparren.

Da die Hyperbel in dieser Controvers mächtig figuriret, so muß ich zuerst suchen die irrigen Begriffe, die sich durch die Equivocation der algebraischen Zeichen in Rücksicht auf diese Curve eingeschlichen haben, zu berichtigen.

Man lege (Fig. 12.) zwey Linien rechtwinklicht wie CL und BA; und mache $CE = b \text{ Tang } A$, und $EF = DE = a \text{ Sec } A$. A ist ein Winkel, den ich den Generirenden nenne, und der von 0 bis 90 Grade wächst.

Zieht man die Punkte A, F, H, M und B, D, G, J, welche auf diese Art entstehen, zusammen, so entstehet eine Hyperbel.

Man sieht leicht, daß man auf der Linie CL, und jenseits AB auf dieselbe Art verfahren könne, und daß daraus zwey andere den ersten vollkommen gleiche Arme entstehen. Es

Es sey EC = b Tang A = y, EF = a Sec A = x; so wird $y^2 = \frac{b^2}{a^2}. (x^2 - a^2)$; oder nennt man CE, x, und EF, y, so ist:

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}. (x^2 + b^2).$$

Da beyde Gleichungen vollkommen die nämlichen sind, nur mit dem Unterschiede, daß man in der ersten x, was man in der zweyten y nannte, so ist offenbar, daß die ganze Aequivocation, die dadurch entstehet, wenn man die erste braucht, blos von einem Mißverstande herrühre, dem man leicht ausweichen kann, wenn man sich der zweyten bedient, welche nie einer Aequivocation unterliegt.

Wird in der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}. (x^2 - a^2)$, x^2 kleiner als a^2, so wird, sagt man uns, y eine unmögliche Größe. Karsten unternimmt sogar, diese unmögliche Größe zu construiren; das heißt mit Worten spielen, denn y ist in diesem Falle = b Tang A, und Tang A kann niemals eine unmögliche Größe werden. Sie kann nur entweder null, positiv oder negativ seyn. Eine unmögliche Tangente oder eine Tangente, die doch keine Tangente ist, ist Unsinn. Der Uebergang vom Positiven ins Negative gehet nicht durch Unmögliche, aber durch Null. Ist also y dadurch null geworden, daß ich x = a gesetzet habe, so ist einleuchtend, daß y negativ werde, nachdem es durch Null gegangen ist, und es ist kein Fall denkbar, wo y unmöglich würde, weil kein Fall denkbar ist, wo die Secante kleiner würde als der Radius.

Wer

Wer sich die Mühe nimmt, die Methode zu erlernen, vermöge welcher alle Kegelschnitte auf die generirenden Winkel reduciret werden, wird sich leicht überzeugen, daß nicht zwey coordinirte Hyperbeln, sondern vier derselben seyen. Nimmt man also GR kleiner als CA = a Tang x, so ist die zu CA coordinirte Linie weder unmöglich noch unendlich, sondern gleich RS = b Sec x. Es entstehen also in der Hyperbel unmögliche Größen nur durch eine Verkehrung der Gleichungen, und durch ein widersinniges Raisoniren über diese Verkehrtheit. Hiermit fallen also alle die Gründe zu Boden, welche unsere Geometer zum Behufe ihrer Meinung über die Logarithmen der negativen Zahlen aus der Natur der Hyperbel deducirt haben.

Alembert war der erste, der muthmaßte, es dürfte der Fehler darin stecken, daß man die Natur der negativen Größen nicht genugsam entwickelt habe. Er stellt sich die Frage, warum in der Gleichung $py = (a-x)^2$, y immer positiv bleibe, es möge x größer oder kleiner seyn als a.

Ohne die vielen Worte zu commentiren, deren er sich bedient, um zu erweisen, daß in den negativen Größen die Zeichen versetzet seyen, will ich nur bey der Frage stehen bleiben; aus dieser erhellet, daß sich Alembert die dieser Gleichung entsprechende Linie als eine Linie vorstellt, die an dem Punkte, wo x = a ist, eine Cuspis hat. Allein diese Gleichung ist die Gleichung der Parabel, nur mit dem Unterschiede, daß man auf eine verkehrte Weise die Abscisse y, und die Ordinate x genannt hat. Stellt man alles her, wie es seyn soll, so sieht man, daß y darum immer positiv bleibt, weil man annimmt, daß jenseits des Vertex der Parabel keine

Fort-

Fortsetzung derselben möglich sey. Dieses scheint mir aber eine ganz ohne Grunde angenommene Behauptung, denn da $px = y^2$, somit $x = \frac{y^2}{p} = \frac{+y.+y}{p} = \frac{-y.-y}{p}$ so ist nicht abzusehen, warum x nicht sogut positiv als negativ genommen werden könnte. Man sieht aber hieraus, daß Alembert seine Begriffe nach den Evolutionen der Algebra, und nicht die Evolutionen der Algebra nach seinen Begriffen, und der Natur der Curven, die er behandelte, einrichtete. Ich erwarte also den Beweis, daß man zwar in allen Kegelschnitten die Abscissen auf der Grundlinie rechts und links nehmen könne, dieses aber in der Parabel unerlaubt sey. Ich einmal kann mich nicht bereden, daß die Gesetze des alten Herkommani in der Mathematik gelten. Nun zu den Logarithmen.

Wenn man 10 zur zweyten, 3ten, 4ten ꝛc. Potenz erhebt, so hat man 100, 1000, 10000 ꝛc. Es ist also möglich, eine x Potenz zu finden, zu der man die Zahl 10 erheben muß, damit man die Zahl 50 bekomme. Ist also $10^1 = 10.$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000.$

Das ist, drückt man die Potenzen durch rechts in die Höhe beygeschriebene Ziffern aus, so muß $10^x = 50$ seyn. Da nun 50 größer als 10, und kleiner als 100 ist, so muß x größer als 1, kleiner als 2, somit $= 1 +$ eine Fraction seyn.

Jeder Zahl entspricht ein eigener Exponent der Zahl 10; kennt man also für jede Zahl die Fraction, die zu 1 addiret werden muß, um das zugehörige x zu bestimmen, so kennt man die Logarithmen aller Zahlen von 1

bis Hundert, denn diese Exponenten sind es, die man berechnete, und durch Verkehrtheit Logarithmen nannte.

Es ist somit offenbar, daß die Zahl 5 einen Logarithmus haben müsse, der kleiner als 1 ist, und da $\frac{10}{10} = 1$, so muß 0 der Logarithmus von 1 seyn. Der Logarithmus von 5 ist somit größer als 0, kleiner als 1, also eine Fraction.

Die Fractionen haben also negative Exponenten von 10; denn wenn $\frac{10}{10} = 1 = 10^0$, so ist $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\frac{1}{100} = 10^{-2}$, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, und so weiter.

Zur besseren Uebersicht wollen wir diese Bemerkungen in Reihe und Glieder stellen.

10^{-4}.	10^{-3}.	10^{-2}.	10^{-1}.	10^0.	10^1.	10^2.	10^3.	10^4
$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10.	100.	1000.	10000.

Aus dieser Reihe sieht man, daß, wenn die Zahlen eine geometrische Reihe bilden, die Exponenten der Zahl 10 eine arithmetische Reihe ausmachen. Aus dieser Reihe ergiebt sich nun, daß kein Ausdruck für Null möglich sey, als $10^{-\frac{1}{0}}$. Da nun vom Positiven zum Negativen der Uebergang durch Null nothwendig ist, so sieht man, um nach der Sprache der Geometer zu reden, daß dieser Uebergang im Unendlichen sey, das ist nirgends. Eine negative Zahl, in sofern Zahl blos eine Menge andeutet, ist, wie bereits oben gezeigt wurde, ein Unding. Was nicht denkbar ist, kann keinen Logarithmen haben.

Wie

Wie aber, wenn von geometrischen Größen und Linien die Rede ist? Alle wirklichen und reellen Größen haben einen Logarithmen. Nun sind negative Linien wirkliche und reele Größen, also haben sie einen Logarithmen.

Man nehme CD (Fig. 13.) von beliebiger Größe, mache CE = 1, und FD = 10. Nun trage man von C nach B mehrere gleiche Theile wie Dn, ns, und mache Pn = 100 Rs = 1000, Hg = 10000, und ziehe die Ende-Punkte dieser Linien zusammen, so entstehet die logarithmische Linie.

Die negativen Ordinaten dieser Curve sind also die negativen Größen. Macht man also nq = — 100, sF = — 1000, so entstehet eine zweyte logarithmische Curve, welche der ersten vollkommen gleich ist.

Die Grundlinie AB, auf welcher die Logarithmen genommen werden, ist eine Assimptote für beyde Curven, und es ist einleuchtend, daß die positiven und negativen Ordinaten zu einerley Abscissen gehören, und folglich denselben Logarithmen haben. Die Ordinaten endlich, die kleiner als CE, also kleiner als die Einheit sind, liegen von C nach A zu, und sind somit offenbar negativ. Jede dieser negativen Abscissen hat aber offenbar eine negative und eine positive Ordinate.

Was wendet man gegen so evidente Wahrheiten ein? Man führt Gründe und Gegengründe an, die man aus den Regeln des Calculs, aus der Differential- und Integral-Rechnung hernimmt. Das ist, man deducirt die Grundsätze der Geometrie aus ihrer Anwendung; und zäumt somit das Pferd beym Schweife auf. Man erwägt nicht, daß eben die Frage davon sey, ob unsere Regeln mathematisch richtig seyen. Man

ver-

verwechselt wohl gar die Begriffe. Karsten meint, daß die Logarithmen der negativen Größe negativ seyn müssen, weil auch das Grundverhältniß negativ sey. Dieses ist offenbar unrichtig. Für die sämmtlichen Ordinaten ist das Grundverhältniß CE: FD, und kann positiv und negativ genommen werden; die zugehörigen Abscissen oder Logarithmen sind alle positiv, die Ordinaten mögen positiv oder negativ seyn. Seine Behauptung ist also gerade so ungereimt, als wenn man behauptete, zu den negativen Ordinaten der Parabel gehöre ein negativer Parameter. In der logarithmischen Curve ist das Grundverhältniß die unveränderliche Größe. Ist dieses von der Art, daß es einer rationellen Opposition fähig sey, so kann es positiv und negativ genommen werden; und alle aus der Zusammensetzung entsprungenen Verhältnisse müssen also auch positiv und negativ genommen werden können. Die Logarithmen aber sind entweder Zahlen, welche ausdrücken, wie oft man ein Verhältniß zusammensetzen müsse, um ein anderes zu erhalten, und sind somit weder positiv noch negativ, oder Abscissen, welche dieselben bleiben, man mag die zugehörigen Ordinaten positiv oder negativ nehmen. *)

Von

---

*) Die Engländer schreiben dem Lord Nepper die Erfindung der Logarithmen zu. Sie waren in Deutschland lange vorher bekannt, und kommen uns von den Arabern, wie der wahre Name Algorithme beweiset. Wir Europäer haben gar viele neue Entdeckungen gemacht, die den Arabern und Indianern längst bekannt waren.

Von der Bedeutung des Zeichen $\frac{0}{0}$

Was ich über diesen Gegenstand zu sagen habe, ist nicht neu, aber doch sehr vielen Geometern, selbst solchen, welche den Ruhm haben, fähige Mathematiker zu seyn, und deren Beruf es ist, die höher Geometrie zu lehren, so unbekannt, daß ich es nicht für undienlich halte, in dieser kleinen Abhandlung etwas über einen Gegenstand zu sagen, der zu manchen Mißdeutungen und Aequivocationen Anlaß gegeben hat.

Ueberhaupt kann ich meine Verwunderung nicht bergen, daß die Kenntniß der höheren Mathematik so selten bey Männern anzutreffen sey, denen man selbst ihrem Amte und ihren Schriften zu Folge zutrauen sollte, daß ihnen die sogenannten höheren Rechnungs-Arten bekannt seyen. Kömmt man in die Lage, sich bey solchen Männern Raths zu erhohlen, so gestehen sie, wenn sie sonst wackere Männer sind, daß sie verrostet seyen, und daß ihnen die Operationen des höheren Calculs nicht mehr geläufig seyen. Selbst bey Astronomen fand ich diese Verrostung. Mehrere, mit denen ich mich über die Theorie der Astronomie besprach, fand ich blos praktische Astronomen, die fix mit ihren Formeln umzugehen wissen, aber ganz unfähig sind, selbe zu finden, und zu prüfen. Sie versicherten mich, daß derselbe Fall bey ihren meisten Collegen einträffe, und daß äußerst wenige im Stande seyen, eine genaue Revision dieser Formeln zu würdigen. Daher erkläre ich mir leicht die blinde Anhänglichkeit an accreditirte Formeln, sie mögen noch so widersinnig seyn. Ihr ächt katholischer Glaube an selbe ist bombenfest gegen Beweis und Vernunft; und trift es sich dann, daß irgend eine Methode für sie eine

terra

terra incognita ist, so stemmen sie sich wie gegen eine Kezerey dagegen, bis man einen in der Mathematik accreditirten Namen aufführt, der den Stempel seiner Unfehlbarkeit dieser Methode aufgedrückt hat.

Ich könnte mehrere Briefe aufweisen, welche beweisen würden, daß auch in der Mathematik der Glaube gar manche Mathematiker selig mache. Es ist beynahe unglaublich, wie viele Mühe es kostet, einen Mathematiker dahin zu bringen, daß er seinen gesunden Menschenverstand brauche. Da, leider! die wenigsten Geometer Metaphysiker sind, so verwerfen sie allen methaphysischen Beweis, und wollen keinen anderen Beweis zulassen, als den, der aus den mechanischen Operationen der Algebra abgeleitet wird. Ein Engländer, mit dem ich es dahin bringen wollte, zu erkennen, daß dem Begriffe einer mechanischen Kraft der Begriff einer Direction wesentlich sey, nannte meine Gründe methaphysische Quibbles, und es gelang mir nicht, ihm zu beweisen, daß zwey Kräfte, welche gleiche Wirkung zugleich, und in derselben Richtung hervorbringen, dieselbe Kraft seyn müssen. Die Betrachtung, daß, wenn sie unterschieden gedacht werden könnten, etwas angegeben werden müsse, worin sie unterschieden sind, nannte er eine metaphysische Spitzfindigkeit, und doch hat dieser Mann einen großen Namen.

Ein anderer wollte durchaus nicht zugeben, daß der Gebrauch desselben Zeichen zu verschiedenen Begriffen auf Zweydeutigkeiten und Absurda führe; methaphysische Gründe vermochten nichts. Ich mußte mich bequemen, seine Sprache zu führen, um von ihm verstanden zu werden. Da er zugab, daß das Endliche dem Unend-

lichen

lichen nicht gleich seyn könne, so legte ich ihm folgende Gleichung vor.

Es sey: $X = a - \sqrt{a^2 - x^2}$.

Diese Gleichung ist wahr und möglich, solange x nicht größer wird als a.

Es ist also auch:

$$X = \frac{(a - \sqrt{a^2 - x^2}).(a + \sqrt{a^2 - x^2})}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x^2}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzet man nun $x = 0$, so wird X auch null, und es ist somit

$\frac{0}{0^2} = \frac{1}{2a}$, also

$0 : 0^2 = 1 : 2a$ oder

$1 : 0 = 1 : 2a$, also $2a = 0$.

Dieser Beweis leuchtete ihm ein, und er gestund, daß es nicht hinreiche, die Zeichen mechanisch zu grouppiren, und daß man nicht nur die Hand, sondern auch den Kopf brauchen müsse, wenn man über mathematische Größen raisoniren wolle.

Dieses führte natürlicher Weise auf die Untersuchung, was $\frac{0}{0}$ bedeute. Er meynte $\frac{0}{0}$ sey eine wirkliche Größe, deren Werth durch den Differential-Calcul gefunden werden könne. Ich behauptete, daß $\frac{0}{0}$ manchmal ein Absurdum bedeute, und manchmal nur anzeige, daß man die Gleichung, welche durch die Verwandlung der Unbekannten auf $\frac{0}{0}$ führet, der Natur der Curve zuwider gestellet habe. In diesem Falle bedarf man aber des Differential-Calculs nicht, um der Gleichung die Form zu geben, welche sie haben soll.

Da

Da fand sich dann, daß dieser Mann von der Methode, dieses zu bewirken, nichts wußte, ungeachtet er in vielen Theilen der Mathematik sehr bewandert war. Als ich ihm sagte, die Funkzion P könne nie $= \frac{0}{0}$ werden, wenn nicht im Zähler und im Nenner ein gemeinschaftlicher Factor sey, und daß die ganze Kunst darin bestehe, diesen gemeinschaftlichen Factor zu finden, so widersprach er anfangs gerade zu. Nach vielen Bedenklichkeiten aber gab er diesen an sich evidenten Satz zu. Nun wußte er aber nicht sich zu erklären, warum der Differential-Calcul nicht diesen gemeinschaftlichen Faktor, sondern nur blos den Werth von P in diesem Falle gebe; und er glaubte, daß es unmöglich sey, diesen Faktor zu finden. Da sich die Möglichkeit leicht zeigen ließ, so war nun der Streit bald beygelegt.

Es sey, $P = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}$.

Diese aus Eulern genommene Gleichung kann auch folgender Maßen ausgedrückt werden.

$$P = \frac{x \log x - (x-1)}{(x-1). \log x.}$$

Setzet man in die erste Gleichung $x = 1$, so wird $P = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$; und nicht $= \frac{1}{0}$.

Setzet man $x = 1$ in die zweyte Gleichung, so wird

$$P = \frac{0 - 0}{0^2} = \frac{0}{0}$$

Es muß also im Zähler und im Nenner ein gemeinschaftlicher Factor stecken. Um ihn zu finden, setze man $x = 1 + v$.

so wird $P = \frac{(1+v) \log. 1 + v - v}{v. \log. (1 + v.)}$

Es

Es ist aber:

$$\log 1+v = v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{1}{4}v^4 + \tfrac{1}{5}v^5 \ldots\ldots$$

also:

$$(1+v).\log.(1+v) - v = \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2.3}v^3 + \tfrac{1}{3.4}.v^4 - \ldots$$

und $v.\,l.\,(1+v) = v^2 - \tfrac{1}{2}v^3 + \tfrac{1}{3}v^4 - \tfrac{1}{4}v^5 + \tfrac{1}{5}v^6 \ldots$

Folglich: $$P = \frac{\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2.3}v^3 + \tfrac{1}{3.4}v^4 - \tfrac{1}{4.5}.v^5 \ldots}{v^2 - \tfrac{1}{2}v^3 + \tfrac{1}{3}v^4 - \tfrac{1}{4}v^5 + \tfrac{1}{5}v^6 \ldots\ldots}$$

also ist v^2 der gemeinschaftliche Factor, und es ist:

$$P = \frac{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2.3}v + \tfrac{1}{3.4}v^2 - \tfrac{1}{4.5}.v^3 + \tfrac{1}{5.6}v^4 \ldots}{1 - \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}v^2 - \tfrac{1}{4}v^3 + \tfrac{1}{5}v^4 \ldots\ldots}$$

Da nun $v^2 = (x-1)^2$ ist, so wird, wenn $x - 1 = 0$, $P = \tfrac{1}{2}$, eigentlich $= -\tfrac{1}{2}$, gerade derselbe Werth, den Euler durch den Differential-Calcul findet, nur daß durch den Differential-Calcul $P = \tfrac{1}{2}$ wird, da diese Größe doch offenbar $-\tfrac{1}{2}$ ist.

In allen Fällen, wo sich kein gemeinschaftlicher Factor finden läßt, bedeutet das Zeichen $\frac{0}{0}$, daß man das Unmögliche berechnet, und das, was ist, durch das, was nicht ist, gesucht habe. Es seyen A, B, C die Seiten eines Dreyecks, a, b, c die selben überliegenden Winkel, so ist $A + B : A - B = \text{Tang}\,\frac{a+b}{2} : \text{Tang}\,\frac{a-b}{2}$

folglich $$\frac{A-B}{\text{Tang}\,\frac{a-b}{2}} = \frac{A+B}{\text{Tang}\,\frac{a+b}{2}}$$

sind $A = B$, und somit $a = b$,

so hat man: $$\frac{A+B}{\text{Tang}\,\frac{a+b}{2}} = \frac{A-B}{\text{Tang}\,\frac{a-b}{2}} = \frac{0}{0}$$

das ist, daß man durch die Differenz zweyer gleicher Größen keine andere bestimmen könne.

Es seyen f, g, h die Halbmesser der Kreise A, B, D. Es sey AB = a, BD = b, AD = c. Man soll den Durchmesser des Kreises finden, der die drey Kreise bereihet.

Der unbekannte Durchmesser sey = 2x, der Winkel DAB = A, ABD = B, der Winkel BAC = φ. Durch diesen unbekannten Winkel wird die Lage des Radius bestimmt. Es ist ferner AC = x + f; CB = x + g, und CD = x + h. Es ist demnach:

$$\text{Cos}\ \varphi = \frac{a^2 + (x+f)^2 - (x+g)^2}{2a.\ (x+f)} =$$

$$\frac{a^2 + f^2 - g^2 + 2\,(f-g)x.}{2a\ (x+f)}$$

$$\text{Cos}\ (A-\varphi) = \frac{b^2 + (x+f)^2 - (x+b)^2}{2b.\ (x+f)} =$$

$$\frac{b^2 + f^2 - h^2 + 2.\,(f-h)x}{2b\ (x+f)}$$

Aus diesen zwey Gleichungen kann man x und φ bestimmen. Allein man kann auch folgender Maßen verfahren. Man verlängere AC bis K, und ziehe AP senkrecht auf BD, CN senkrecht auf BD, CG senkrecht auf AP, so ist der Winkel AKD = φ + B, folglich CG = (x + f) Cos φ + B. Also

$$\text{Cos CBN} = \frac{BN}{CB} = \frac{a\ \text{Cos}B - (x+f)\,\text{Cos}\,(\varphi+B.)}{x+g}$$

Es ist aber auch

$$\mathrm{Cos}\ CBN = \frac{c^2 + (x+g)^2 - (x+h)^2}{2c.\ (x+g)} = \frac{c^2 + g^2 - h^2 + 2(g-h)x}{2c.\ (x+g)};$$

also ist

$$\mathrm{Cos}(\varphi + B) = \frac{2ac\mathrm{Cos}B - (c^2 + g^2 - h^2) - 2(g-h)x}{2c.\ (x+f)}$$

Dividiret man durch Cos φ, so wird

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,B}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Tang}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,B = \frac{2a^2c\,\mathrm{Cos}\,B - a(c^2 + g^2 - h^2) - 2a(g-h)x}{c(a^2 + f^2 - g^2) + 2c(f-g)x},$$

und eben so ist, wenn man Cos $(A - \varphi)$ durch Cos φ dividirt,

$$\frac{\mathrm{Cos}\,A\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \mathrm{Cos}A + \mathrm{Tang}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,A. = \frac{a(b^2 + f^2 - h^2) + 2a(f-h)x}{b(a^2 + f^2 - g^2 + 2ab(f-g)x.}$$

Reduciret und entwickelt man x, so hat man, wenn man Kürze halber $a^2 + f^2 - g^2 = m^2$; $b^2 + f^2 - h^2 = n^2$; $c^2 + g^2 - h^2 = p^2$ setzt:

$$x = \frac{m^2bc.\mathrm{Sin}A + B - a(bp^2\,\mathrm{Sin}\,A + cn^2\,\mathrm{Sin}B) + 2abc\mathrm{Sin}A\mathrm{Cos}B}{2a(b\mathrm{Sin}A(g-h) + c\mathrm{Sin}\,B\,(f-h)) - 2bc\,\mathrm{Sin}A + B(f-g)}$$

Setzt man in dieser Gleichung $f = h = g$, und $a = b = c$, das ist: nimmt man an, die Mittelpunkte der Kreise seyen gleich entfernet, und die Durchmesser gleich, so wird $x = \frac{0}{0}$. Nun hat aber in jedem Falle x einen wahren und wirklichen Werth, es mag der Nenner oder der Zähler, oder beyde Zähler und Nenner

zugleich Null werden. Allein dieses beweiset weiter nichts, als daß man durch diese Methode den Werth von x nicht finden könne, und nicht, daß x eine Größe sey, die in dem Maße zunimmt, als die Radien der Kreise sich der Gleichheit nähren, und unendlich werde, wenn diese Radien einander gleich sind. Man suche also unmittelbar den Werth von x aus den Gleichungen für Cos φ, und (Cos A — φ,) und man wird eine Aequation vom zweyten Grade erhalten, in der keine Zweydeutigkeit liegt.

Alles dieses wissen wir schon längst, wird ein Rezensent sagen.... Ja einer unter Hunderten von denen, die sich für Matadors ausgeben, und dennoch, ungeachtet sie kaum die Elemente des Differential-Calculs wissen, mit vollem Munde schreyen, ohne dx und dy sey kein Heil in der Geometrie.

Der Leser vergebe dem Verfasser diesen kleinen Ausfall gegen die Eigenliebe einiger Männer, die sich mit vieler Selbst-Genügsamkeit zu Dictatoren in einem Fache aufwerfen, wo nur der gesunde Menschen-Verstand herrschen soll; und diesem zum Trotze alle Prüfung schulgerechter Meinungen mit bewunderungswürdiger Beharrlichkeit verwehren. Sie machen sichs zum Point d' honneur, die Verbreitung einer Meinung zu verhindern, die nicht die ihrige ist. Von solchen verrosteten Mathematikern Wahrheits-Liebe zu erwarten, wäre Thorheit. Sie sind an ihre Meinungen durch die eisernen Fessel der Gewohnheit, und durch ihre Eigenliebe gebunden. Die meisten sind Schriftsteller nach der Mode; das ist, sie haben aus 99 Büchern das hundertste

zu-

zusammgesteppelt. Und nun sollten sie erkennen, daß sie sich geirrt haben, daß ihre mathematischen Glaubens-Artikel mit Grundbegriffen des menschlichen Verstandes in Widerspruche seyen, daß ihre prächtigen Evolutionen mit den algebraischen Zeichen eine läppische Spielerey mit diesen Zeichen sey?!

Auch habe ichs mit diesen Herren nicht zu thun. Sie mögen ihren Bannfluch über diese Bogen aussprechen. Allein bey jungen Männern, die den Gebrauch ihrer Vernunft nicht zu den Händen des göttlichen Newtons, des unfehlbaren Eulers abgeschworen haben, ist einige Hoffnung vorhanden, daß diese Auffoderung, selbst zu denken und zu prüfen, nicht fruchtlos seyn werde. Sie werden die Vorurtheile, welche der erste Unterricht in ihren Verstand pflanzte, mit der Wurzel ausreißen, und erkennen, daß alle Mathematik damit anfangen müsse, daß sie gesunden Menschen-Verstand habe. Sie werden erkennen, daß ihr Verstand ihre Finger, und nicht ihre Finger ihren Verstand leiten müssen; daß das Unmögliche, das Widersprechende kein Factor des Möglichen und Wirklichen seyn könne; daß endlich die Zeichen der Algebra keine magischen Zeichen seyen, und daß hinter selben keine mystischen Bedeutungen, keine Eleusinischen Geheimnisse stecken. N'en déplaise à Mrs Schelling und Consorten.

Von einigen mathematischen Vorurtheilen.

Höret man die Astronomen, so ist unser astronomisches System auf so festen Gründen gebauet, daß sie dem Wechsel der Zeiten, und den Einwürfen der Uneingeweihten Troz biethet. Der gesunde Menschen-Verstand hat dabey eben so wenig als bey Schelling eine Stimme. Die verlegenen Zweifler widerlegt man nicht, man sieht sie mitleidig an. Man pfeift sie aus. Man nimmt sich gar nicht die Mühe, ihre Zweifel zu prüfen, und zu widerlegen; man ist ja seiner Sache ohne dies gewiß. Mein Herr, sagte ein Tausendkünstler der großen Nation, der nach Deutschland kam, um die deutschen Laien in der Geometrie zu unterrichten, und astronomische Beobachtungen anzustellen, zu denen man ihnen nicht hinreichendes Geschick zutrauete. Ich habe für ihre Beweise alle mögliche Achtung; aber wenn einmal erwiesen ist, daß eine Sache sey, so kann doch unmöglich erwiesen werden, daß sie nicht sey. Erlauben sie mir also, daß ich mehr Zutrauen in die Beweise eines Newtons, Eulers, Clairaut's, Alembert's, Lalande's, und anderer als in die ihrigen setze. Ihr Beweis kann doch nichts anderes als ein Gewebe feiner Trugschlüsse seyn, die ich auseinander zu setzen, weder Zeit noch Lust habe.

Vielleicht hätte er auch hinzusetzen sollen, daß er, um sie zu widerlegen, kein Geschick habe. Wenn es bey geometrischen Problemen mit Authoritäten ausgerichtet wäre, so möchte dieser berühmte Schüler des berühmten Lalande's eben nicht unrecht gehabt haben. Allein da alle Authoritäten seit Adams Zeiten an einen einzigen Ver-

Vernunft-Grunde scheitern, so beweiset eine solche Antwort weiter nichts, als ein durch sklavische Nachbeterey gelähmtes Vermögen, selbst zu denken; vielleicht auch bey einigen aufgeklärteren Männern ein bescheidenes Mißtrauen zu ihren eigenen Kenntnissen mit einer guten Dose von Eigenliebe vermischt; die da macht, daß man sich scheuet, seinen Beyfall zu bekennen, weil man fürchtet, sich zu compromittiren, und von heller sehenden Censoren auf die Finger geklopft zu werden.

Ich kann es wegen dieser Censoren Scheue besonders in Deutschland niemanden verdenken, wenn man liest, wie schneidend unsere Physiker und Astronomen gegen alle verwegene Zweifler absprechen, und sie anathematisiren. Sie kommen noch wohlfeil davon, wenn man ihnen nur Unwissenheit in den sublimen Künsten der höheren Mathematik zu Schulden legt. Und wer wagte es dann, von einem so einstimmigen Urtheile zu appelliren? Diese Herrn machen ja Calender, und diese Calender treffen ja so genau mit den Erscheinungen am Himmel überein, (wenn nämlich die Grund-Berechnung 17male corrigiret worden ist) daß gar kein Zweifel bestehen kann. Je nun gesetzt auch, es wäre erweislich, daß eine Kraft, die wie umgekehrt das Quadrat der Distanzen wirkte, ein Absurdum in Terminis wäre, und es ließe sich aus rein metaphysischen Gründen beweisen, daß ein solches Ding gar nicht möglich sey; was liegt den Astronomen daran? sie abstrahiren von der Ursache, und denken sich blos eine Wirkung, die sich nach diesen Verhältnissen richte.

Wer nun das Unglück hat, an die allein seligmachende Lehre Newtons nicht zu glauben, hat einen harten Stand. Er muß die Zeit abwarten, wo die Mode, Newtons Apotheose mit vollen Baken auszuposaunen, vorüber seyn wird. Sich auf Newtons Werke selbst zu berufen, würde ihm nicht nützen. Denn seine Prinzipien haben das Schicksal der Bibel in katholischen Ländern. Man vergöttert sie auf Treue und Glauben, und liest sie nicht. Ich erlaube mir sogar eine verwegene Muthmassung, und wage es zu behaupten, daß wenige Geometer seyen, die Newtons Werke selbst auch dann verstehen, wenn sie in den Misterien des Differential- und Integral-Calculs eingeweihet sind. Newton schrieb, wie mir scheint, absichtlich dunkel, theils um das mangelhafte seines Systemes, das er ganz gewiß selbst einsah, zu überkleistern, und theils auch, um es mit den Theologen nicht zu verderben, die an der Attraktion epikurische und lukrezische Irrthümer hätten riechen können.

Gesetzt aber es wären die Newtonischen Werke keine mathematische Apokalypse; und man erlaubte einem vermessenen Zweifler, seine Zweifel vorzutragen, so hat dieser nicht viel dabey gewonnen; denn wer soll Richter seyn? Unsere Astronomen haben es dahin gebracht, daß niemand als sie selbst Richter in dieser Controvers seyn kann, und somit sind sie Richter und Partey zugleich. Das Publicum kann über die Gründe nicht absprechen, selbst auch dann, wenn der Leser und Zuhörer in der Mathematik, welche die transzendentalen Geometer mit Verachtung die gemeine Elementar-Mathematik nennen, vollkommen bewandert ist. Hat aber ein Schüler sich entschlossen, sich in die Mysterien des Differ-

ferential-Calculs einweihen zu lassen, so lehrt man ihm beym ersten dx die Müze vor dem grossen Genie ab-nehmen, das die Flurions-Rechnung erfand, und die Planeten auf der Spize seines Gänsekiels abwog. Mit Leuten, die man so früh in verba magistri juriren lehrte, ist mit Vernunft-Gründen streiten ein taubes Stroh dreschen.

Ich, der Verfasser, wenn ich das Unglück haben sollte, daß meine Kezereyen von den unfehlbaren Stell-vertrettern des unfehlbaren Newtons verdammt werden, gehöre doch wenigstens nicht zu den Unmündigen, die sich in die Gefahr stürzen, ohne selbe zu kennen. Ich sehe vor, daß die subordinirten Wächter des astrono-mischen Capitols Zetter über mich rufen werden, und daß die Dictatoren, welche gar wohl im Stande seyn dürf-ten, das Wahre und Unwahre zu unterscheiden, gleich dem Könige Heinrich dem VIII. aus England durch Eigen-liebe und Eitelkeit an die Glaubenslehre gebunden seyen, die sie mit ihren Gänsekielen unterstüzten. Wer kennt die Welt so wenig, daß er hoffen dürfte, die blosse Wahrheitsliebe könne unseren berühmten Tausendkünst-lern das Geständniß abnöthigen, daß sie in dicken Quar-tanten das bewiesen haben, was nicht ist, nicht möglich ist, und auf handgreifliche Absurda führt? Die Vor-urtheile, die also in der Physik und der Astronomie das Bürgerrecht erhalten haben, werden somit ganz gewiß mit Hartnäckigkeit vertheidiget werden. Doch diese Be-trachtungen schrecken mich nicht ab. Wenn eine Wahr-heit in das Reich des Wissens introduciret werden soll, so muß sie doch einmal angekündigt und genannt wer-den; sollte sie auch erst in Jahrhunderten anerkannt

wer-

werden. Indessen bin ich doch nicht ganz ohne Hoffnung einiges guten Erfolgs. Unser Jahrhundert liebt die Veränderung. Warum soll nicht auch eine Wahrheit in dem Wechsel der Moden an die Reihe kommen? Newtons System ist ja schon mehr als hundert Jahre alt. Schon fangen selbst Engländer an, daran zu zweifeln, daß sich die Planeten von der Sonne entfernen, weil sie von derselben angezogen werden. Hätte ich in der Schellingischen Schule gelernet, einen undurchdringlichen Wort Nebel um mich zu verbreiten, und die gemeinsten Sachen mit transzendentalem idealistischen Bombast vorzutragen, so fände ich ganz gewiß Nathaniele, die darum glauben würden, weil sie nicht verstehen. Allein da ich mich selbst gern verstehe, wenn ich schreibe; da ich nicht die Ehre habe, ein Cathecumen der neuen Kirche des heiligen Geistes zu seyn, die an die Stelle der wurmstichigen Kirche Christi gekommen ist; da ich endlich lieber verstanden als bewundert werde, so muß ich mich wohl dazu bequemen, den Vortheilen zu entsagen, welche ein Neuerer aus scientifischem Kauderwelsche ziehen kann. Doch bemerke ich nur im Vorbeygehen und eruditionis causa, daß die neue Wirzburger Kirche mir in meinem Abfalle von der allein seligmachenden Lehre Newtons vorgegangen sey. Denn da nach den Glaubens-Artikeln derselben die Planeten heilige, verständige, genügsame Thiere, ja Götter sind, so können doch ihre Bewegungen unmöglich von einer Projection per tangentem, und von einer Attraction herrühren, sondern es ist einleuchtend, daß sie sich mit Spontaneität im Welt-Raume promeniren, und treffliche Geometer seyen, welche die Distanzen bis auf Zoll und Linien mit den Augen zu schätzen wissen. Lehren, an

deren

deren Wahrheit selbst schon Britten und die neue Kirche des heiligen Geistes, die an Köhlerglauben alle andere Kirchen der Welt weit übertrifft, zweifeln, müssen also doch keine streng mathematisch erwiesenen Wahrheiten seyn, ungeachtet sie erst vor wenigen Jahren in einem dicken Buche mit den Dornen des Differential- und Integral-Calculs so verpallisadiret wurden, daß vermessenen Zweiflern angst und bange wird, wenn sie wahrnehmen, wie dicht der Verhau ist, mit welchem Newtons Lehren verschanzt sind.

Es ist also beschlossen ... ich wage es, Fontenelles Rathe zuwider eine Wahrheit aus meiner Hand für die entschlüpfen zu lassen, die sie nicht hören wollen. Aber auf welchem Wege soll ich sie der Welt introduciren? Soll ich ihre Gegner mit ihren eigenen Waffen angreiffen, und mit dx, dy gegen selbe zu Felde ziehen? Dieses wäre wohl der sicherste und siegreichste Weg, denn ich vorzüglich einschlagen würde, wenn ich hoffen könnte, viele unbefangene Leser zu finden, die im Stande wären, und die Geduld hätten, einer solchen Controvers Schritt für Schritt zu folgen. Sie würden dann selbst bey den dornigsten Untersuchungen manchmal lächeln, wenn sie sehen, wie die größten Geometer bisweilen den Esel suchen, auf dem sie reiten, und durch mühsame Integrationen herausrechnen, was sie durch ihre Voraussetzungen schon in die Differential-Gleichung legten. Diese Mißgriffe rühren daher, daß die strenge Geometrie, und besonders die Lehre der Kegelschnitte ungemein vernachlässiget wird; und die Lehrart dieses wichtigen Theils der Mathematik so unzweckmäßig ist, daß es unmöglich wird, die Formeln aller zu einem Punkte

coor-

coordinirten Linien, und ihre Verhältnisse im Kopfe zu behalten.

Um deutlich zu werden, muß ich ein Beyspiel anführen.

Wenn man die Curve der Planetar-Bewegungen bestimmen will, so findet man, daß, wenn z den Radius Vector, p den Perpendikel auf die Tangente, c die Geschwindigkeit, e die Wirkung der Centralkraft in Aphelio bedeuten, die Gleichung des Durchmessers der Krümmung folgende seyn müsse:

$$\text{Diam: Curv:} = \frac{c^2}{e} \cdot \frac{z^3}{p^3}.$$

Nun sagt man: eben dieser Diameter ist aber $= z\frac{dz}{dp}$; also ist:

$$z\frac{dz}{dp} = \frac{c^2}{e} \cdot \frac{z^3}{p^3}.$$

Diese Gleichung wird integriret, und man findet dann eine Gleichung zwischen z und p; die man für die allgemeine Formel der Kegelschnitte erkennt.

Allein die Rechner bemerken nicht, daß sie durch diese Operation beweisen, was sie schon bey Zusammensetzung der Differential-Formel voraussetzten, und daß sie also durch die Integration herausrechnen, was sie in die Gleichung selbst legten. Dieses ist hier jedem beym ersten Blicke offenbar, der nach meiner Methode die Kegelschnitte zu studiren, sich die Mühe nehmen wird.

Der-

Derselben gemäß findet man, daß die Diameter der Krümmungs-Kreise der Kegelschnitte sich verhalten wie Directe die Würfel des Radius Vector, und umgekehrt wie die Würfel der Perpendikel auf die Tangente. Da nun in obiger Gleichung $\frac{c^a}{c}$ eine unveränderliche Größe ist, so ist die Bahn der Planeten eine Curve, deren Krümmungs-Kreis gerade dasselbe Verhältniß hat, als die Krümmungs-Kreise der Kegelschnitte, also selbst ein Kegelschnitt. Wären also die Voraussetzungen alle richtig, so wäre es ganz überflüssig, die sublimen Kunstgriffe der höheren Mathematik zu Hülfe zu nehmen, um die Bahn der Planeten zu bestimmen; denn es läßt sich aus der Gleichung für den Durchmesser des Krümmungs-Kreises der Durchmesser und Parameter der Bahn sehr leicht bestimmen. Man wird mir also eingestehen müssen, daß dieses künstliche Machwerk weiter nichts als eine Spielerey mit Zeichen sey, deren man ganz hätte entbehren können, wenn man in der Theorie der Kegelschnitte geübter wäre.

Dieses vorausgesetzt, so kämme es nur darauf an, zu untersuchen, ob die für den Diameter der Krümmung zusammengesetzte Gleichung bestehen könne; aber hic labor, hoc opus est. Um diese Untersuchung zweckmäßig anzustellen, müßte man beym Anfange anfangen, und ein Buch schreiben, das der bey weiten größere Theil der Leser bey den ersten Blättern in den Camin werfen, wenn es einen unbekannten Namen auf dem Titel führte, oder ungelesen in seine Bibliothek stellen würde, wenn es den berühmten Namen eines französischen Senators führte.

Wir

Wir wollen also einen kürzeren Weg einschlagen, der uns vielleicht doch zum Ziele führen, und den Vortheil gewähren wird, daß auch selbst die Läien, welche die dx, dy auch nicht den Namen nach kennen, und nur in den Elementen der Algebra und der gemeinen Geometrie bewandert sind, über die Evidenz der Beweise absprechen können.

Wir wollen einstweilen Newton vergessen, und unseren guten Keppler vornehmen. Es mögen S, s die Oberflächen zweyer Planeten-Bahnen bedeuten,

T, t ihre Umlaufs-Zeiten,

D, d die Distanzen ihrer Aphelien,

C, c die Umlaufs-Geschwindigkeiten in der Sonnenferne,

E, e die Wirkung der Gravitation in der Sonnenferne,

R, r die Radien der Krümmungs-Kreise der Bahnen in der Sonnenferne,

A, a die großen Axen der Bahnen.

So läßt sich auf folgende Weise die Bahn der Planeten aus dem gegebenen Verhältnisse der Schwerkraft, und umgekehrt, die Schwerkraft aus der gegebenen Bahn bestimmen.

Da nach Keppler die von dem Radius Vector in gleichen Zeiten beschriebenen Flächen einander gleich sind, so findet man die Zeit in Sekunden, wenn man die Oberfläche der Bahn durch die Sekunden-Fläche dividirt. Die Sekunden-Flächen am Vertex in der Sonnen-

nen-Ferne sind die Sonnen-Ferne multiplicirt mit dem halben Geschwindigkeits-Bogen in der Sonnenferne, also ist:

$$T : t = \frac{S}{D.C} : \frac{s}{d.c}$$

Sind nun R, r die Halbmesser der Krümmungs-Kreise in der Sonnenferne, so sind E, e die Sinus versi der Sekunden-Winkel, C, c die Sehnen derselben, und es ist

$2RE = C^2$ und $2re = c^2$; also

$$T : t = \frac{S}{D.\sqrt{RE}} : \frac{s}{d.\sqrt{re}}$$

Folglich:

$$E : e = \frac{S^2}{D^2.T^2.R} : \frac{s^2}{d^2.t^2.r}$$

Nun lernet Keppler ferner, daß sich die Quadrate der Zeiten wie die Würfel der großen Axen der Bahnen verhalten, also ist:

$$E : e = \frac{S^2}{D^2.A^3.R} : \frac{s^2}{d^2.a^3.r.}$$

Sind also S, s die Bahnen elliptisch, so sind R, r die halben Parameter, und es ist:

$$S^2 : s^2 = A^3.R : a^3r.$$

Also:

$$E : e = \frac{A.^3R}{D.^2A.^3R} : \frac{a^3r}{d^2.a^3r} = \frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}$$

das ist: die Wirkungen der Schwerkraft verhalten sich in dieser Voraussetzung, wie umgekehrt die Quadrate der Distanzen.

Ist

Ist aber: $E : e = \frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}$

so muß:

$$S^2 : s^2 = A^3R : a^3r$$

also: $S : s = A\sqrt{A}.\sqrt{R} : a\sqrt{a}\sqrt{r}$

und also Linien seyn, deren Flächen-Gehalte sich verhalten, wie das Produkt der Wurzel aus den Würfeln ihrer grossen Bahnen, und der Wurzel des Halbmessers des Krümmungs-Kreises am Vertex. Diese Linien sind also Ellipsen.

Man sieht hieraus, daß es kein so grosses Hexenwerk ist, als man uns gerne bereden wollte, aus dem Verhältnisse der Schwerkraft die Bahn, und aus der Bahn das Verhältniß der Schwerkraft zu finden. Das eine wie das andere fließt so unmittelbar aus den Kepplerischen Regeln, daß ich nicht begreiffen kann, wie man den Brittischen Rechenmeister darum vergöttern könnte, daß er durch seine Fluxions-Künste mit vielen Kräften-Aufwande das suchte, was ihm vor den Füßen lag.

Dieses, wenn es auch so ganz richtig wäre, soll doch kein Einwurf gegen Newtons Theorie seyn; werden die Newtonianer sagen. Du findest durch eine leichtere Methode, was wir durch eine schwerere finden; aber dieses beweiset weiter nichts, als daß unsere dx, dy kein mathematisches Machwerk (wie du sie nennest) sind, sondern auf genaue und richtige Resultate führen.

Geduld! latet anguis sub herba. Der Einwurf lauert im Hinterhalte. Ueberrechnen sie das ganze noch

ein-

einmahl; sind alle Sätze richtig? oder finden sie nicht einen zweydeutigen ..... Nein! ... Nun gut! so hören sie weiter.

Nehmen sie auf den beyden Bahnen einen beliebigen Punkt, ziehen sie die Tangenten und die Perpendikel auf die Tangenten:

Es seyen V, v die Geschwindigkeiten an den angenommenen Punkten, P, p die Perpendikel auf die Tangenten, so sind $\frac{PV}{2}$, $\frac{pv}{2}$ die Sekunden-Flächen zu den genommenen Punkten, und da nach Keppler alle Sekunden-Flächen gleich sind, so ist

$$P.V = D.C, \text{ und } p.v = d.c.$$

Es ist also auch

$$T : t = \frac{S}{P.V} : \frac{s}{pv.}$$

Da nun:

$$T : t = A\sqrt{A} : a\sqrt{a}$$

da ferner, weil S und s Oberflächen von Ellipsen sind:

$$S : s = A\sqrt{A}\sqrt{R} : a\sqrt{a}\sqrt{r},$$

so ist:

$$V : v = \frac{\sqrt{R}}{P} : \frac{\sqrt{r}}{p};$$

das ist: die Geschwindigkeiten zweyer Planeten an den verschiedenen Stellen ihrer Bahnen verhalten sich wie directe die Wurzeln der Parameter, und umgekehrt die Perpendikel auf die Tangenten zu diesen Punkten.

Meine Herrn! geben sie dieses Verhältniß zu? Ich bin noch so ehrlich, sie zu warnen, daß ich sie im Sacke habe, wenn sie es zugeben!

Das wäre! Wir lassen uns nicht ins Bockshorn jagen. Das Verhältniß ist richtig. Denn ist $R = r$, das ist: sind die Punkte in derselben Bahn, so ist:

$$V : v = \frac{1}{P} : \frac{1}{p}.$$

Also verhalten sich die Geschwindigkeiten wie umgekehrt die Perpendikel auf die Tangenten. Ein Verhältniß, das wir selbst mathematisch demonstriren. Das obige Verhältniß an verschiedenen Stellen verschiedener Bahnen beweiset Newton selbst sehr schön in seinen Prinzipien im ersten Buche in der 17ten Proposition.

Soll ich also zuziehen?.... Du bist kein Hexenmeister!.... Es sey also.

P und p sind veränderliche Größen, die jeden Werth erhalten können, welcher der Natur der Ellipse nicht widerspricht; wenn sie nur dadurch nicht größer als das große Segment der Axe, und nicht kleiner als das kleine Segment derselben werden.

Jedem Werthe von P, p entspricht dann ein coordinirtes V, v, und die Rechnung wird das Verhältniß der Geschwindigkeit an diesen Punkten zu den Perpendikeln ausdrücken. Man setze also $P = n\sqrt{R}$, und zugleich $p = n\sqrt{r}$, das ist: man nehme unter den verschiedenen möglichen Perpendikeln zwey, die sich verhalten,

halten, wie die Wurzeln der Parameter der Bahnen; so wird in diesem Falle:

$$V : v = \frac{\sqrt{R}}{n\sqrt{R}} : \frac{\sqrt{r}}{n\sqrt{r}} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n}$$

das ist: die Geschwindigkeiten werden an den Stellen beyder Bahnen, wo die zugehörigen Perpendikel sich wie die Wurzel der Parameter verhalten, gleich seyn.

Nun weiß man aber ganz gewiß, daß zwey Planeten in keiner Stelle ihrer Bahnen gleiche Geschwindigkeiten haben können, also ....

Also wäre wohl gar die Kepplerische Regel, daß der Radius Vector in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibe .. Risum teneatis amici!

Zuerst, meine Herren, versuchen sie diesen sehr einfachen Einwurf aufzulösen, und dann lachen sie nach Lust. Nur muß ich ihnen eröffnen, daß ein halbes Dutzend Geometer und Astronomen ihre Kräfte daran versucht, und die Hoffnung aufgegeben haben, das Räthsel zu lösen. Ich zweifle nicht, daß sie antworten werden, daß diese Geometer nur Stümper gegen die illustrissimos, sagacissimos, celeberrimos nostros seyen; wahrscheinlicher Weise wird ganz Europa, das ist, 5 bis 6 geübte Transzendental-Mathematiker, beystimmen; sie werden die Objection und den Opponenten mit einem Federzuge pulverisiren. Sie werden dazu von dem Opponenten selbst aufgefordert, als welcher gern alle Celebrität eines Euler, wenn er sie besäße, darum gäbe, um sich zu überzeugen, daß eine Täuschung dieser Art mög-

 lich

lich sey. Aber um eines wird ausdrücklich gebeten. Schreiben sie so, daß auch der Elementar-Mathematiker sie verstehen könne.

Nebenher könnten sie vielleicht auch folgenden Zweifel zu verlornen Stunden mitnehmen. Gleich nachdem Newtons Theorie bekannt wurde, tratt ein Jesuit, der berühmte Pere Castel Erfinder des bizarren, aber auf richtigen (in sofern Analogie richtig ist) Voraussetzungen berechneten Augen Claviers gegen selbe auf. Er beurtheilte Newtons Theorie nach den Gesetzen des gesunden Menschen-Verstandes. Dieses war freylich absurd.

Herr Schelling, jener Thaumaturg, der zum Beweise seiner göttlichen Sendung zu Pokelt die Gesunden krank, und die Kranken todt macht, hat uns so oft widerhohlt, daß der gesunde Menschen-Verstand im Wissenschaftlichen gar keine Stimme mehr habe, et qu'il n'est bon qu'à faire la Cuisine, daß wir sehr hölzern und hartherzig seyn müßten, wenn wir daran zweifelten. Wir wissen vielmehr, daß Wahrheiten desto wahrer und erhabener seyen, je offenbarer sie ihm widersprechen. Damals aber, in jenen Zeiten barbarischer Finsternisse, wo die Loke, die Clarke und andere seichte Raisonneurs dieser Art deraisonnirten, damals galt der Menschen-Verstand noch, und man war so albern, ihm manchmal (wenn es keine theologischen Säze betraf) recht zugeben. Dieser Castel also behauptete, es sey geradezu dem schlichten Menschen-Verstande zuwider, daß eben das, was da macht, daß der Planet sich nähere, ganz allein die Ursache sey, warum er sich entfernet, und zwar auf dem Punkte, wo die anziehende

Kraft ein Maximum ist. Er meinte, keine Kraft könne durch ihr Maximum ins Negative übergehen. Diese absurde Meinung mahlte er nach seiner bekannten Art mit sehr lebhaften Farben aus, und verführte dadurch viele Rechtgläubige.

Der französische Schwätzer ist, wie leicht zu erachten, siegreich widerleget worden. Diese Widerlegung steht in allen Büchern. Man nehme Lalande zur Hand, so wird man finden, daß aus der Central-Kraft, welche auf Annäherung wirkt, und aus der Tangential-Kraft, welche ebenfalls in der elliptischen Bahn von der Sonnenferne an den Planeten der Sonne näher bringt, eine Centrifugal-Kraft entstehe, welche die Entfernung bewirkt, weil sie wie umgekehrt die Würfel der Distanzen wächst, während dem die Centripetalkraft wie umgekehrt das Quadrat der Distanzen zunimmt. Diese Centrifugal-Kraft ist der Widerstand, den der Körper gegen die Kraft äussert, welche sich bemühet, seine Bahn zu krümmen; dieser Widerstand ist also im directen Verhältnisse des Quadrats der Geschwindigkeit, mit der sich der Körper bewegt, und im Umgekehrten des Krümmungs-Kreises in dem er schwingt. Er wird also durch den Sinus versus des Sekunden-Bogens auf dem Durchmesser der Krümmung gemessen ausgedrückt. Nennt man also die Geschwindigkeiten an zwey Punkten V, v, die Centrifugal-Kräfte, F, f, die Krümmungs-Durchmesser R, r,

so ist: $F : f = \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$.

Es

Es seyen D, d die großen und kleinen Segmente der Axe, so ist:

$$V^2 : v^2 = \frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}.$$

Nun schwingt der Planet in der Sonnenferne und Sonnennähe in den Entfernungen D, d, also ist in diesem Falle R = D, r = d, folglich

$$F : f = \frac{1}{D^3} : \frac{1}{d^3}.$$

welches zu erweisen war.

Ich weiß nicht, ob der Pere Castel sich mit dieser Antwort begnüget habe. Dann mußte er wirklich ein sehr unbedeutender Gegner der brittischen Philosophie gewesen seyn. Allein, was mich wundert, eben diese Antwort findet sich in allen neuesten astronomischen Lehrbüchern. Die Grundsätze derselben sind auf die Theorie des Mondes und der Perturbationen angewendet worden, ohne daß seit so vielen Jahren von irgend einem aus so vielen vortrefflichen Astronomen und Geometern bemerket worden wäre, daß ein Factor in diesem Verhältnisse übergangen worden sey. Um zu beweisen, daß dieses Versehen ganz gewiß Statt habe, wird man mir erlauben, die Rechnung etwas anderst zu stellen.

Die Schwungkraft, oder der Widerstand, den der umlaufende Planet der Krümmung seiner Bahn leistet, wird durch den Sinus versus des Bogens ausgedrückt, den der Planet zu gleicher Zeit durchläuft. In diesem Falle betrachtet man den Bogen der Curve als einen

Bogen

Bogen des zu diesem Punkte gehörigen Krümmungs-Kreises, den man, weil man ihn als sehr klein annimmt, seiner Sehne gleich setzt. Es ist demnach der Krümmungsdurchmesser gleich dem Quadrate des Geschwindigkeitsbogens dividiret durch die vom Sinus versus vorgestellte Schwungkraft.

Man nehme also nach Belieben zwey Punkte M, m einer Planeten-Bahn,

Y, y bedeute den coordinirten Radius Vector,

P, p den Perpendikel aus dem Brenn-Punkte auf die coordinirten Tangenten,

V, v die coordinirten Geschwindigkeits-Bögen;

F, f die Sinus versus dieser Bogen sollen die denselben proportionirten Schwungkräfte bedeuten;

R sey der Parameter der Ellipse, so ist

$$\frac{V^2}{F} : \frac{v^2}{f} = \text{Rad: Curv: ad } M : \text{Rad: Curv: ad } m = \frac{R.Y^3}{P^3} : \frac{R.y^3}{p^3}.$$

Nun verhalten sich die Geschwindigkeiten wie umgekehrt die Perpendikel auf die Tangenten; also ist:

$$\frac{PV}{p} = v.$$

Man substituire und reducire, so findet man

$$F : f = \frac{P}{Y^3} : \frac{p}{y^3},$$

also verhalten sich die Schwungkräfte wie directe die Perpendikel auf die Tangenten, und umgekehrt die Würfel der Vectoren.

In

In der Sonnenferne und Sonnennähe an den beyden Scheiteln der Ellipse ist nun der Perpendikel dem Radius Vector gleich. Bedeuten also M, und m die Punkte der Sonnenferne und Sonnennähe, so ist:

$$F : f = \frac{1}{Y^2} : \frac{1}{y^2},$$

folglich verhalten sich in diesen zwey Punkten die Schwungkräfte wie umgekehrt die Quadrate der Distanzen. Da nun die Wirkungen der Attraction gerade in demselben Verhältnisse sind, so ist offenbar, daß in diesen zwey Punkten die Schwerkraft und Schwungkraft im Gleichgewichte seyen.

Wir sehen also hieraus, daß unsere Geometer bey Bestimmung des Verhältnisses der Schwungkräfte den Factor P, p übersehen haben, indem sie

$$F : f = \frac{1}{Y^3} : \frac{1}{y^3}$$

setzen.

Sie begehen noch einen anderen Fehler, denn in der Gleichung

$$F : f = \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r},$$

in der R, r die Radien Schwungs- oder Krümmungs-Kreise bedeuten, setzen sie für den Punkt der Sonnenferne R = D, für den Punkt der Sonnennähe r = d. Nun weiß aber jeder Anfänger, daß der Radius des Krümmungs-Kreises an beyden Scheiteln gleich sey, also ist:

$$F : f = V^2 : v^2 = \frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}$$ und

nicht: $F : f = \frac{1}{D^3} : \frac{1}{d^3}$.

Aber daraus würde ja folgen, daß die Sonne uns den Mond schon längst entführet, und dieser gegen die Ordnung der Zeichen um die Sonne laufen müßte. Wie stünde es denn mit unseren Perturbations-Berechnungen, mit unserer schönen Theorie der Ebbe und Fluth? Trift denn nicht alles mit den Beobachtungen haarklein zusammen? Wie ist es also möglich, daß sich in die Rechnungen ein so grober Fehler eingeschlichen habe? Wie wäre es möglich, daß die Euler, Kästner et Consorten seit so vielen Jahren denselben nicht bemerket hätten? Die praktischen Astronomen mußten ja schon blos durch mechanische Berechnung darauf gekommen seyn.

Auch dieses läßt sich erklären, aber freylich kann ich in diesem kleinen Werke, dem ich viele Leser wünsche, keine Prüfung unserer astronomischen Formeln und Rechnungen anstellen, und zeigen, wie sich die Fehler so compensiren, daß die Rechnungen mit den Beobachtungen ziemlich genau zusammentreffen. Zudem würde ich schwerlich selbst von unseren Astronomen verstanden werden, bevor sie sich meine Methode, die Kegelschnitte zu behandlen, geläufig gemacht haben werden. Diese Methode kürzt alle Formeln ungemein ab, und setzt den, welcher sich dieselbe eigen macht, in den Stand, sehr schwere Probleme, zu deren Berechnung nach der gewöhnlichen Methode ganze Bogen erfodert werden, aus dem Kopfe aufzulösen.

Sie

Sie wird demnächst im Drucke erscheinen, und ferner müssen auch noch vor allen einige ohne Beweise angenommenen Meinungen geprüfet und bewahret werden. Man nimmt allgemein und gegen alle Analogie an, daß die Umdrähungszeit der Erde eine unveränderliche durchaus gleichförmige Dauer sey. Ich glaube, aus sehr wichtigen Gründen behaupten zu dürfen, daß diese Meinung ein Irrthum sey; daß in einem Systeme harmonisch veränderlicher Bewegungen keine unveränderliche Bewegung möglich sey, und daß die Umdrehungszeit der Planeten sich wie umgekehrt die Wurzeln ihrer Entfernungen von der Sonne verhalte. Natürlicher Weise stehet dieser neuen Meinung der Einwurf entgegen: Woher kömmt es, daß wir seit so vielen Jahrhunderten die Ungleichheiten in den Umdrähungszeiten der Erde, die doch 24 Minuten mittlerer Zeit betragen müßten, nicht bemerkten? Die Beantwortung dieses Einwurfes erfordert Vorbereitungen, die mir dermal unmöglich sind. Hier kann ich also zur Zeit nur solche Einwürfe gegen Newtons System vortragen, welche von der großen Menge der Leser verstanden und beurtheilet werden können.

Unsere Geometer sagen uns, daß, wenn die Schwungkraft mit der Schwerkraft im Gleichgewichte stehe, der Körper einen Kreis beschreiben müsse. Bey der Planetar-Bewegung müßte also nach Newtons System die Schwungkraft in der Sonnennähe größer seyn, als die Schwerkraft; weil der Planet sich entfernet. In der Sonnenferne aber wäre die Schwerkraft größer als die Schwungkraft, weil sich der Planet der Sonne nähert. Es muß also zwischen der Sonnenferne

und

und Sonnennähe ein Punkt seyn, wo die Schwerkraft und Schwungkraft einander gleich sind. Von diesem Punkte aus müßte also der Planet um den Brennpunkt einen Kreiß zu beschreiben anfangen.

So würde es auch seyn, antwortet Lalande, wenn in dem Punkte, wo dieses Gleichgewicht eintritt, die Richtung der Tangente mit dem Radius Vector rechtwinklicht wäre; allein der Punkt des Gleichgewichts ist in den mittleren Distanzen, wo der Radius Vector der halben großen Axe gleich ist, und mit der Tangente einen spitzen Winkel macht.

Auch mit dieser ungemein seichten Antwort auf diesen Einwurf haben sich unsere Astronomen begnüget. Der Irrthum ist offenbar; denn es kann leicht erwiesen werden, daß im Punkte der mittleren Distanzen, wo der Radius Vector der halben großen Axe gleich ist, das Gleichgewicht zwischen der Schwer- und Schwungkraft nicht bestehen könne. Dieses ist schon aus der bloßen Vernunft einleuchtend, wenn man ihr mit einer Zeichnung zu Hülfe kömmt. Es würde daraus folgen, daß, wenn in dem Punkte der mittleren Distanzen beyde Kräfte einander gleich wären, von diesem Punkte aus die Schwungkraft größer als die Schwerkraft würde. Der Planet könnte sich also nicht mehr näheren, als in sofern die Richtung der Tangente selbst ihn dem Mittelpunkte der Kräfte näher brächte. Allein von dem Punkte an, der senkrecht ober dem Brennpunkte stehet, bekommt die Tangente eine Richtung, die den Planeten entfernet, also müßte dieser Punkt der Punkt der Sonnennähe seyn, von welchem aus er sich zu entfernen an-

anfienge. Doch es kann directe bewiesen werden, daß dieses Gleichgewicht im Punkte der mittleren Distanzen nicht bestehe.

Es sey a die halbe große Axe, b die halbe kleine Axe, d die Excentrizität, c die Geschwindigkeit in der Sonnenferne, v die Geschwindigkeit in den mittleren Distanzen; e der Sinus versus des Geschwindigkeits-Bogens in der Sonnenferne, oder die Schwungkraft in diesem Punkte, f eben dieser Sinus versus in den mittleren Distanzen; so ist

$$\frac{v^2}{f} = \text{Diam. Curv. in den mittleren Distanzen} = \frac{2a^2}{b}.$$

Nun ist $v^2 = \frac{(a+d)^2 . c^2}{b^2}$,

weil sich die Geschwindigkeiten verhalten wie umgekehrt die Perpendikeln auf die Tangenten, also ist

$$f = \frac{c^2 . (a+d)^2}{2a^2 b}.$$

Es verhält sich aber die Schwerkraft wie umgekehrt das Quadrat der Distanzen. Es sey also g die Schwerkraft im Punkte der mittleren Distanzen, also ist

$$g = \frac{(a+d)^2 e}{a^2}.$$

Nun ist: $e = \frac{c^2}{\frac{2b^2}{a}} = \frac{ac^2}{2b^2}$

weil $\frac{2b^2}{a}$ der Parameter, der Durchmesser des Krümmungs-

mungs-Kreises am Scheitel ist, also ist:

$$g = \frac{(a+d)^2 . c^2}{2ab^2},$$

folglich verhält sich:

$$f : g = \frac{(a+d)c^2}{2a^2b} : \frac{(a+d)^2 c^2}{2ab^2} = b : a,$$

und es ist f nicht gleich, sondern im Verhältnisse von b: a kleiner als g.

Diese Gründe, die ich mir das Grab der Attraktion zu nennen erlaube, haben allen Geometern, denen ich sie vorlegte, unwiderleglich geschienen. Selbst vor Jahren ein eifriger Verehrer Newtons traute ich kaum meinen Augen, als ich diese Fehler wahrnahm. Mögen doch die, welche diese Blätter lesen, in ihren Versuchen das Gravitations-System zu retten glücklicher seyn, als jene Astronomen und Geometer, die mir meine Lage zu Rathe zu ziehen erlaubte. Ich werde mich nicht schämen, eines Irrthums überwiesen zu werden; denn ich denke wie Franklin; es liegt niemanden daran, daß ich für einen fähigen Geometer gehalten werde; aber daran liegt vieles, daß Irrthümer aufgedecket, und berichtiget werden.

Anleitung

zur

gradlinigten

Trigonometrie.

Anleitung
zur
Trigonometrie.

§. 1. Die Trigonometrie lehrt aus drey gegebenen Größen des Dreyeckes die nicht gegebenen finden; doch darf keine von den gegebenen Größen die Summe oder die Differenz oder ein Multiplum der beyden übrigen seyn; denn sonst sind im Grunde nur zwey gegeben.

§. 2. Es sey Fig. 1. ein Kreis vom Radius CB. Es sey DCB ein Winkel von A Graden, den wir somit durch A bezeichnen wollen. Man errichte in C eine Perpendikular-Linie CH, so theilt der Radius CD den Quadranten HCB in zwey Theile, nämlich DCB und HCD. Ist nun DCB = A, so ist HCD = 90° — A. Man nennt HCD das Complement des Winkels A.

§. 3. Man ziehe DE senkrecht auf CB, DK senkrecht auf CH, so ist DE der Sinus des Winkels DCB oder A. DK der Sinus des Winkels DCH oder 90°—A. Der Theil des Radius CE, der zwischen

 dem

dem Punkte E, und dem Mittelpunkte C fällt, nennt man den Cosinus des anliegenden Winkels. Da nun wegen der Parallelen CE = KD ist, so ist der Cosinus eines Winkels A = Sin. 90° — A gleich dem Sinus des Complements.

Anmerkung. Da DE = CK ist, so ist auch Sin A = Cos 90° — A. Das ist: der Sinus eines Winkels ist gleich dem Cosinus seines Complements.

§. 4. Wächst der Winkel A, so wächst auch sein Sinus, und sein Cosinus nimmt ab; doch sieht man leicht, daß weder der Sinus noch der Cosinus größer werden können als der Radius. Setzt man also diesen Radius gleich der Einheit, so werden Sin A, Cos A durch Fraktionen ausgedrückt werden.

§. 5. Wächst der Radius CD, während der Winkel DCB unverändert bleibt, so wächst DE und CE in eben dem Verhältnisse; wird also CD = r, so wird DE = r Sin A, CE = r Cos A.

§. 6. EB ist = CB — CE = 1 — Cos A. Man nennt dieses Segment des Radius den Sinus versus des Winkels A.

§. 7. Wenn ein Winkel 90 Grade groß ist, so ist sein Sinus dem Radius gleich. Man nennt ihn alsdann Sinus totus. Sein Cosinus ist dann = 0.

§. 8. Wird ein Winkel größer als 90 Grade, so fällt sein Cosinus auf die linke Seite des Centrums C. Um ihn von jenem gleichen Cosinus, der auf der rechten Seite liegt, zu unterscheiden, setzt man ihm das Zeichen — vor; und sagt die Cosinusse der stumpfen Winkel seyen negativ.

§. 9.

§. 9. Wächst der Bogen A bis 180 Grade an, so wird der Cosinus desselben gleich dem Radius CA = — 1.

§. 10. Nennt man den Bogen von 180°, π, so haben π — A, und A gleiche Sinus, und auch gleiche Cosinus, nur liegt der Cosinus von A zwischen C und B; der Cosinus von π — A zwischen C und A.

§. 11. Der Cosinus von π + A ist auch negativ, denn er liegt zwischen C und A, aber der Cos 2 π — A, und Cos 2 π + A sind positiv, denn sie liegen von C nach B zu. Fährt man in diesen Betrachtungen fort, so findet man, daß die Cosinusse aller Bogen, wo der Coeffizient von π eine gerade Zahl ist, positiv seyen, das ist, zwischen C und B fallen; daß sie hingegen negativ werden, wenn dieser Coeffizient eine ungerade Zahl ist, weil sie sodann zwischen C und A fallen.

§. 12. Liegt der Sinus oder der Perpendikel, den man von der Spitze des Bogens auf die Linie AB, den Diameter zieht, unterhalb desselben, so sagt man, der Sinus sey negativ, und bezeichnet ihn mit —. Man sieht also wohl, daß Sin A, Sin π — A positiv seyen, denn sie liegen oberhalb AB, dagegen ist Sin π + A, Sin 2 π — A negativ, denn sie liegen unterhalb AB. Sin 2 π + A; Sin 3 π — A sind positiv, aber Sin 3 π + A, und Sin 4 π — A sind negativ, und so weiter. Bedeutet also n eine gerade Zahl, so ist Sin. n π + A, Sin. n + 1. π — A immer positiv, dagegen Sin. n π — A, und Sin. n 1. π + A immer negativ.

§. 13. Zieht man die Sehnen DB, DA, so ist DBA ein recht winkliches Dreyeck, und es ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke EBD, ADE,

$$EB : ED = ED : EA, \text{ oder :}$$

$1 - \text{Cos } A : \text{Sin } A = \text{Sin } A : 1 + \text{Cos } A$ Also: $\text{Sin}^2 A = 1 - \text{Cos}^2 A$; folglich $\text{Cos}^2 A + \text{Sin}^2 A = 1$.

Anmerkung. Hier bedeuten $\text{Sin}^2 A$ und $\text{Cos}^2 A$ die dritten Proportional-Linien zu 1 und Sin A, 1 und Cos A, und nicht die Quadrate von CE und DE. Dieser Lehrsatz ist also von dem Pythagorischen ganz verschieden, und lehrt uns, daß die Summe der dritten Proportional-Linien zum Radius und Sinus, und zum Radius und Cosinus, dem Radius gleich seyen. Dieser Lehrsatz kann auch folgendermassen erwiesen werden. Man ziehe EL senkrecht auf CD, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke CDE, CLE, LED;

$CD : CE = CE : CL$, oder, $1 : \text{Cos } A = \text{Cos } A : CL$, somit $CL = \text{Cos}^2 A$. Ferner:

$CD : DE = DE : DL$, oder, $1 : \text{Sin } A = \text{Sin } A : DL$, somit $DL = \text{Sin}^2 A$.

Also ist $CD = CL + LD$, oder $1 = \text{Sin}^2 A + \text{Cos}^2 A$.

§. 14. Man errichte DF senkrecht auf D, so berührt diese Linie den Kreis in D. Verlängert man sie, bis sie die verlängerten Radien CB, CH in F und in G schneidet, so ist DF die Tangente des Winkels A; DG die Tangente seines Complements, oder die Cotangente des Winkels A. CF ist die Secante des Winkels A. CG die Secante des Complements von A, oder die Cosecante des Winkels A; und es ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke CDE, CDF

CE:

$$CE : ED = CD : DF \text{ oder:}$$

$$\text{Cos A} : \text{Sin A} = 1 : \text{Tang A, also Tang A} = \frac{\text{Sin A}}{\text{Cos A.}}$$

$$CE : CD = CD : CF \text{ oder:}$$

$$\text{Cos A} : 1 = 1 : \text{Sec A, folglich Sec A} = \frac{1}{\text{Cos A.}}$$

Ferner wegen Aehnlichkeit der Dreyecke CKD, CGD, und weil CE = KD, DE = KC ist:

$$KC : KD = CD : DG : \text{ oder}$$

$$\text{Sin A} : \text{Cos A} = 1 : \text{Cotang A: also Cot: A} = \frac{\text{Cos A}}{\text{Sin A.}}$$

$$KC : CD = CD : CG, \text{ oder:}$$

$$\text{Sin A} : 1 = 1 : \text{Cosec A, also Cosec A} = \frac{1}{\text{Sin A.}}$$

§. 15. Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke GCD, DCF ist

GD: DC = DC: DF, oder Cot A: 1 = 1:Tang A; also ist: Tang A. Cot A = 1.

Das ist: der Radius ist die mittlere Proportional-Größe zwischen der Tangente und der Cotangente.

§. 16. Ist einer der Factoren obiger Größen §. 14 negativ, so sind die Größen selbst negativ. Das ist: man setzt selben das Zeichen — vor.

§. 17. Die Tafeln geben das Verhältniß der jedem Winkel coordinirten Größen in Decimal-Fraktionen, deren Nenner = 10.000000 ist. Der Sinus von 20 Graden ist $= \frac{3420201}{10000000}$, die Secante von

70°

$70° = \frac{29238044}{10000000}$. Die Logarithmen dieser Größen sollten also als Logarithmen von Fraktionen negativ seyn. Um aber einigen Unbequemlichkeiten auszuweichen, substituirt man den wahren Logarithmen ihr Supplement zur Charakteristik 10; darum muß man bey deren Gebrauche immer 10 von der Charakteristik der gefundenen Summe abziehen. Will man z. B. berechnen, wie groß DE ist, wenn der Radius 1000 Schuh, der Winkel 20° gleich ist, so hat man

$x = 1000 . \text{Sin } 20°$, also $\log. 1000 = 3.0000000$;

addiret $\log. \text{Sin } 20° = 9.5340517$

12.5340517

$- 10.0000000$,

somit $\log. x = 2.5340517$,

folglich x beyläufig 342 Schuh.

§. 18. Kennt man den Sinus und den Cosinus eines Winkels, so findet man den Sinus, Cosinus und die übrigen Coordinaten der Hälfte, des Viertheils und so weiter, desselben Winkels. Denn da der Sinus die Hälfte der Sehne ist, so ist $DB = 2 \text{Sin} \frac{DCB}{2}$. Zieht man also CM senkrecht auf DB, so ist $DCM = MCB = \frac{1}{2} A$, somit $DM = \text{Sin} \frac{1}{2} A$, $CM = \text{Cos} \frac{1}{2} A$, folglich wegen der Parallelen CM und AD,

$AD = 2 \text{Cos} \frac{1}{2} A$.

Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke EDB, ADB ist:

$CB : DB = DB : AB$; oder

$1 - \text{Cos} A : 2 \text{Sin} \frac{1}{2} A = 2 \text{Sin} \frac{1}{2} A : 2$. Also

$\text{Sin} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos} A}{2}}$. Eben so ist:

AE:

$$AE : AD = AD : AB$$ oder

$$1 + \text{Cos } A : 2 \text{ Cos } \tfrac{1}{2} A = 2 \text{ Cos } \tfrac{1}{2} A : 2,$$ also:

$$\text{Cos } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos } A}{2}},$$

folglich ist $\text{Tang } \tfrac{1}{2} A = \dfrac{\sqrt{1 - \text{Cos } A}}{\sqrt{1 + \text{Cos } A}}$;

$\text{Cot } \tfrac{1}{2} A = \dfrac{\sqrt{1 + \text{Cos } A}}{\sqrt{1 - \text{Cos } A}}$, und so weiter.

Der Winkel an der Peripherie DAB ist gleich MCB $= \tfrac{1}{2} A$, und da die Dreyecke CMB und AED ähnlich sind, so ist:

$$CM : MB = AE : ED$$ oder

$$\text{Cos } \tfrac{1}{2} A : \text{Sin } \tfrac{1}{2} A = 1 + \text{Cos } A : \text{Sin } A,$$ also ist:

$$\frac{\text{Sin } \tfrac{1}{2} A}{\text{Cos } \tfrac{1}{2} A} = \text{Tang } \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{Sin } A}{1 + \text{Cos } A},$$ und

$$\frac{\text{Cos } \tfrac{1}{2} A}{\text{Sin } \tfrac{1}{2} A} = \frac{1 + \text{Cos } A}{\text{Sin } A} = \text{Cot } \tfrac{1}{2} A.$$

Und da auch der Winkel EDB = MCB ist, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke MCB, EDB,

$$CM : MB = DE : EB,$$ oder

$$\text{Cos } \tfrac{1}{2} A : \text{Sin } \tfrac{1}{2} A = \text{Sin } A : 1 - \text{Cos } A,$$ also ist auch,

$\text{Tang } \tfrac{1}{2} A = \dfrac{1 - \text{Cos } A}{\text{Sin } A}$, und $\text{Cot } \tfrac{1}{2} A = \dfrac{\text{Sin } A}{1 - \text{Cos } A}$.

An-

Anmerk. Da $\frac{1}{\text{Sin A}} = \text{Cosec A}$, $\frac{1}{\text{Sin A}}$ Sec A ist, so ist auch:

$$\text{Cot } \tfrac{1}{2} A = \text{Cosec A} + \text{Cot A}, \text{ und}$$
$$\text{Tang } \tfrac{1}{2} A = \text{Cosec A} - \text{Cot A}.$$

§. 19. Setzt man in die Gleichung für Sin $\frac{1}{2}$ A, Cos $\frac{1}{2}$ A statt Cos A, Cos $\frac{1}{2}$ A, so hat man Sin $\frac{1}{4}$ A; Cos $\frac{1}{4}$ A. Und es ist:

$$\text{Sin } \tfrac{1}{4} A = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } \frac{1}{2} A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \text{Cos A}}{2}}}{2}}$$

$$\text{Cos } \tfrac{1}{4} A = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos } \frac{1}{2} A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \text{Cos A}}{2}}}{2}}$$

Auf diese Art findet man dann Sin $\frac{1}{8}$ A, Sin $\frac{1}{16}$ A u. s. w.

§. 20. Nennt man A den Winkel DCM = MCB, so ist der Winkel DCB = 2 A; somit DE = Sin 2 A, CE = Cos 2 A, und es ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke DEB, ABD,

$$\text{DB} : \text{BE} = \text{AB} : \text{AD}, \text{ oder}$$
$$2 \text{ Sin A} : \text{Sin } 2 \text{ A} = 2 : 2 \text{ Cos A}, \text{ also ist:}$$
$$\text{Sin } 2 \text{ A} = 2 \text{ Cos A}. \text{ Sin A}.$$

Ferner ist AB : DB = DB : EB, oder: 2: 2 Sin A = 2 Sin A: 1 — Cos 2 A. Also

$$\text{Cos} 2\text{A} = 1 - 2\text{Sin}^2\text{A} = \text{Cos}^2\text{A} - \text{Sin}^2\text{A} = 2\text{Cos}^2\text{A} - 1$$

Anmerkung. Man kennt demnach auch die übrigen Coordinaten des doppelten Winkels.

Setzt

Setzt man in die Gleichung für $\sin 2A$, $\cos 2A$, statt $\sin A$, $\sin 2A$, und statt $\cos A$, $\cos 2A$, so hat man den Werth von $\sin 4A$, und es ist:

$$\sin 4A = 2\sin 2A.\cos 2A = 2.2\sin A.\cos A.(2\cos^2 A - 1)$$
$$= (8\cos^3 A - 4\cos A).\ \sin A$$
$$\cos 4A = 1 - 8\sin^2 A.\cos^2 A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1.$$

Auf eben diese Art findet man $\sin 8A$, $\sin 16A$ u. s. w.

§. 21. Ist (Fig. 2) $ACD = A$, $DCB = B$, so findet man aus $AF = \sin A$, $CF = \cos A$, $DE = \sin B$, und $CE = \cos B$, die Linie $AH = \sin A + B$, u. $CH = \cos A + B$. Dann zieht man vom Punkte F, FG senkrecht auf AH, FK senkrecht auf CB, so ist der Winkel $FGL = FCK = GAF = B$; und es ist

$CD : DE = AF : FG$ oder,

$1 : \sin B = \sin A : FG$, somit $FG = \sin A.\ \sin B$.

$CD : CE = AF : AG$, oder

$1 : \cos B = \sin A : AG$, somit $AG = \sin A.\cos B$.

$CD : DE = CF : FK$, oder

$1 : \sin B = \cos A : FK$, somit $FK = \cos A.\sin B$.

$CD : CE = CF : CK$, oder

$1 : \cos B = \cos A : CK$, somit $CK = \cos A.\cos B$.

Also $AH = AG + GH = AG + FK = \sin A + B = \sin A \cos B + \sin B \cos A$.

Und $CH = CK - KH = CK - FG = \cos A + B = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

§. 22. Ist (Fig. 2.) Der Winkel $MCR = A$, $SCR = B$, so wird $MO = \sin A - B$ $CO = \cos A - B$, man verlängere MO, und ziehe NQ senkrecht auf SC, NP senkrecht auf MO, so ist der

Win-

Winkel MNQ = OMN = QCN = B, und da MN = Sin A, NC = Cos A; ST = Sin B; TC = Cos B ist, so wird:

$NQ = PO = \text{Cos } A \text{ Sin } B,\ QC = \text{Cos } A.\ \text{Cos } B.$

$MP = \text{Sin } A \text{ Cos } B,\ NP = OQ = \text{Sin } A \text{ Sin } B,$

Also ist: $CO = OQ + QC = \text{Cos } \overline{A - B} = \text{Cos } A \text{ Cos } B + \text{Sin } A \text{ Sin } B.$

Und $MO = PM - PO = \text{Sin } \overline{A - B} = \text{Sin } A \text{ Cos } B - \text{Sin } B \text{ Cos } A.$

§. 23. Diesemnach ist

$$\text{Tang } \overline{A+B} = \frac{\text{Sin } \overline{A+B}}{\text{Cos } \overline{A+B}} = \frac{\text{Sin} A \text{ Cos} B + \text{Sin} B \text{ Cos} A}{\text{Cos} A \text{ Cos} B - \text{Sin} A \text{ Sin} B}$$

$$\text{Tang } \overline{A-B} = \frac{\text{Sin } \overline{A-B}}{\text{Cos } \overline{A-B}} = \frac{\text{Sin} A \text{ Cos} B - \text{Sin} B \text{ Cos} A}{\text{Cos} A \text{ Cos} B + \text{Sin} A \text{ Sin} B.}$$

Man dividire in beyden Gleichungen Zähler und Nenner durch Cos A Cos B, so bekömmt man für diese Größen einen Ausdruck durch die Tangenten von A und B, und man hat:

$$\text{Tang } \overline{A+B} = \frac{\text{Tang } A + \text{Tang } B.}{1 - \text{Tang } A.\,\text{Tang } B}$$

$$\text{Tang } \overline{A-B} = \frac{\text{Tang } A - \text{Tang } B}{1 + \text{Tang } A \text{ Tang } B.}$$

Anmerkung. Dividirt man durch Sinus A Sin B, oder Sin A Cos B ꝛc. so erhält man einen anderen Ausdruck von gleichem Werthe.

§. 24. Da man Sin $\overline{A+B}$, und Cos $\overline{A+B}$, Sin $\overline{A-B}$ und Cos $\overline{A-B}$ kennt, so kennt man auch aus §. 18 den Sinus und Cosinus der Hälfte dieser Winkel.

Sel-

Selben gemäß ist:

$$\text{Sin}\,\frac{A+B}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B+\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B}{2}}$$

$$\text{Cos}\,\frac{A+B}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B-\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B}{2}}$$

$$\text{Sin}\,\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B-\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B}{2}}$$

$$\text{Cos}\,\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B+\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B}{2}.}$$

Multiplicirt man jede der zween ersten Gleichungen mit der dritten und vierten, so findet man nach der Reduktion:

$$2\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}.\ \text{Sin}\,\frac{A-B}{2} = \text{Cos}\,B - \text{Cos}\,A.$$

$$2\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}.\ \text{Cos}\,\frac{A-B}{2} = \text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B.$$

$$2\,\text{Cos}\,\frac{A+B}{2}.\ \text{Sin}\,\frac{A-B}{2} = \text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B.$$

$$2\,\text{Cos}\,\frac{A+B}{2}.\ \text{Cos}\,\frac{A-B}{2} = \text{Cos}\,B + \text{Cos}\,A.$$

also ist: $\text{Tang}\,\frac{A+B}{2} = \frac{\text{Cos}\,B - \text{Cos}\,A}{\text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B}$

$$\text{Tang}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\text{Cos}\,B - \text{Cos}\,A}{\text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B.}$$

Folglich:

$$\text{Tang}\,A+B : \text{Tang}\,\frac{A-B}{2} = \text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B : \text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B.$$

Anmerkung. Dieses Verhältniß kann auf eine ächt geometrische Weise folgender Massen gefunden werden.

§. 25.

§. 25. Es sey (Fig. 3.) der Winkel $ACB = BCE = A$; $BCD = B$, so ist $ACD = A + B$, $DCE = A - B$. Also ist $AF = \text{Sin } A$, $CF = \text{Cos } A$, $DH = \text{Sin } B = FG$; $CH = \text{Cos } B = DM$. Folglich ist $AG = AF + FG = \text{Sin } A + \text{Sin } B$. $GE = FE - FG = \text{Sin } A - \text{Sin } B$. Da auch $DM = \frac{KD}{2} = CH$, auch $CF = MG$ ist, so wird $KG = \text{Cos } B + \text{Cos } A$, und $GD = \text{Cos } B - \text{Cos } A$.

Nun hat der Winkel AKD an der Peripherie den halben Bogen AKD zum Maaße; der Winkel DKE hat den halben Bogen DE zum Maße. Folglich ist der Winkel $AKD = \frac{A + B}{2}$; $DKE = \frac{A - B}{2}$. Es ist demnach: $KG : GA = 1 : \text{Tang } \frac{A + B}{2}$, oder

$$\text{Cos } A + \text{Cos } B : \text{Sin } A + \text{Sin } B = 1 : \text{Tang } \frac{A + B}{2}.$$

$$KG : GE = 1 : \text{Tang } \frac{A - B}{2}, \text{ oder}$$

$$\text{Cos } A + \text{Cos } B : \text{Sin } A - \text{Sin } B = 1 : \text{Tang } \frac{A - B}{2},$$

also ist:

$$\text{Sin } A + \text{Sin } B : \text{Sin } A - \text{Sin } B = \text{Tang } \frac{A + B}{2} : \text{Tang } \frac{A - B}{2}.$$

Das ist: die Summe der Sinus zweyer Winkel verhält sich zur Differenz dieser Sinus, wie die Tangente der halben Summe beyder Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Anmerkung. Es ist: $\text{Tang } 45° = 1$, wenn man die Einheit für den Radius annimmt.

Man

Man setze $\frac{\text{Sin } A}{\text{Sin } B} = \text{Tang } T$; so ist:

$$\frac{\text{Tang } T + 1}{\text{Tang } T - 1} = \frac{\text{Sin } A + \text{Sin } B}{\text{Sin } A - \text{Sin } B} = \frac{\text{Tang } \frac{A+B}{2}}{\text{Tang } \frac{A-B}{2}}$$

also $\text{Tang } \frac{A-B}{2} = \text{Tang } \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\text{Tang } T - 1}{\text{Tang } T + 1}$.

Ist also die Summe zweyer Winkel A und B, und das Verhältniß ihre Sinus, nämlich $\frac{\text{Sin } A}{\text{Sin } B} = \text{Tang } T$ gegeben, so kennt man die Tangente ihrer halben Differenz, und folglich die Winkel selbst.

Gesetzt es wäre: $\text{Sin } A : \text{Sin } B = 4 : 3$, und $A + B = 120°$

so ist: $\frac{\text{Tang } T + 1}{\text{Tang } T - 1} = 7$, und $\text{Tang } \frac{A+B}{2} = \sqrt{3}$

also: $\text{Tang } \frac{A-B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{7}$.

Folglich $\frac{A-B}{2} = 13° \, 54'$: $A = 73°, 54'$, $B = 46°, 6'$.

Diese Formel kann für die Logarithmen bequem gemacht werden, wenn man die Formel für die Tangante der Differenz aus §. 23 zu Hülfe nimmt; denn setzt man in selber A = T, und B = 45°, so wird

$$\text{Tang } (T - 45°) = \frac{\text{Tang } T - 1}{\text{Tang } T + 1}.$$

Also

Also ist auch: $\text{Tang}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\text{Tang}\,\frac{A+B}{2}}{\text{Tang}(T-45^\circ)}$,

folglich: $\log.\,\text{Tang}\,\frac{A-B}{2} = \log.\,\text{Tang}\,\frac{A+B}{2} + \log.\,\text{Tang}\,T - 45^\circ - 10$.

§. 26. Die Linie AD ist $= 2\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}$, die Sehne DE $= 2\,\text{Sin}\,\frac{A-B}{2}$. Da nun der Bogen $\frac{KE}{2}$ das Maß des Winkels KAE ist, und KAE $= 90^\circ - $AKG ist, so ist die Sehne KE $= 2\,\text{Cos}\,\frac{A+B}{2}$. Eben so findet man, daß der Bogen $\frac{AK}{2}$ das Maß des Winkels KEA ist, welcher 90 Grade − GKE ist, folglich ist die Sehne AK $= 2\,\text{Cos}\,\frac{A-B}{2}$. Es ist demnach:

$$AD : AG = 1 : \text{Cos}\,DAG,$$ oder

$$2\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2} : \text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B = 1 : \text{Cos}\,\frac{A-B}{2},$$ also

$$\text{I)}\quad 2\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}.\,\text{Cos}\,\frac{A-B}{2} = \text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B.$$

$$DE : GE = 1 : \text{Cos}\,DEG,$$ oder

$$2\,\text{Sin}\,\frac{A-B}{2} : \text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B = 1 : \text{Cos}\,\frac{A+B}{2},$$ also

$$\text{II)}\quad 2\,\text{Sin}\,\frac{A-B}{2}.\,\text{Cos}\,\frac{A+B}{2} = \text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B.$$

$$KE : KG = 1 : \mathrm{Cos}\, EKG, \text{ oder}$$
$$2\,\mathrm{Cos}\,\frac{A+B}{2} : \mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,A = 1 : \mathrm{Cos}\,\frac{A-B}{2}, \text{ also}$$
$$\text{III) } 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{A+B}{2}.\ \mathrm{Cos}\,\frac{A-B}{2} = \mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,A.$$
$$AD : GD = 1 : \mathrm{Sin}\, DAG, \text{ oder}$$
$$2\,\mathrm{Sin}\,\frac{A+B}{2} : \mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Cos}\,A = 1 : \mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}, \text{ also}$$
$$\text{IV) } 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{A+B}{2}.\ \mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2} = \mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Cos}\,A.$$

§. 27. Die Gleichung Nro. 1. läßt sich folgender Maßen ordnen.

$$\mathrm{Sin}\,A + \mathrm{Sin}\,B : \mathrm{Sin}\,\frac{A+B}{2} = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{A-B}{2} : 1.$$

Man setze $A = nB$, und multiplicire die beyden Glieder rechter Hand mit $\mathrm{Sin.}\,\frac{n-1.\,B}{2}$, so ist:

$$\mathrm{Sin.}\,nB + \mathrm{Sin}\,B : \mathrm{Sin}\,\frac{n+1.\,B}{2} =$$
$$2\,\mathrm{Cos}\,\frac{n-1.\,B}{2}\ \mathrm{Sin}\,\frac{n-1\,B}{2} : \mathrm{Sin}\,\frac{n-1.B}{2}, \text{ oder}$$
$$\mathrm{Sin.}\,nB + \mathrm{Sin}\,B : \mathrm{Sin}\,\frac{n+1.B}{2} = \mathrm{Sin}\,n-1.\,B : \mathrm{Sin}\,\frac{n-1.B}{2}.$$

Dieses Verhältniß ist unter dem Namen des Vietischen Lehrsatzes bekannt, ungeachtet man ihn in keinem Lehrbuche findet.

§. 28. Es sey (Fig. 4.) alles wie Fig. 3; nämlich $ACB = BCE$ sey A, $BCD = B$, so ist, wenn man AP senkrecht auf CD zieht, und bis an die Peripherie verlängert, $AP = PF = \text{Sin } A + B$; $CP = \text{Cos } A + B$, und da $DCE = A - B$ ist, so ist $EK = PN = \text{Sin } A - B$, $CK = \text{Cos } A - B$, folglich: $PK = NE = \text{Cos } A - B - \text{Cos } A + B$; auch ist $FN = PF - PN = \text{Sin } A + B - \text{Sin } A - B$.

Nun ist der Winkel $EAF = BCD$, dann der Bogen FE ist gleich $DCF - DCE = A + B - (A - B) = 2B$, also ist:

$$EN = \text{Cos } A - B - \text{Cos } A + B = AE.\ \text{Sin } EAF = 2\ \text{Sin } A\ \text{Sin } B.$$

$$AN = \text{Sin } A + B + \text{Sin } A - B = AE.\ \text{Cos } EAF = 2\ \text{Sin } A\ \text{Cos } B.$$

$$FN = \text{Sin } A + B - \text{Sin } A - B = FE.\ \text{Cos } AFE = 2\ \text{Sin } B.\ \text{Cos } A.$$

Da endlich $LF = 2\ \text{Cos } A$ ist, weil der Winkel $LAF = 90° - ALN = 90° - A$ ist, so ist: $LN = \text{Cos } A + B + \text{Cos } A - B = LF.\ \text{Cos } ELF = 2\ \text{Cos } A.\ \text{Cos } B$.

Anmerkung. Diese Verhältnisse §. 26 sind brauchbar, um trigonometrischen Formeln eine für den Gebrauch der Logarithmen bequeme Gestalt zu geben. Z. B. Es sey $x = \frac{2\ \text{Sin } A + B}{\text{Sin } A + \text{Sin } B}$. Nun ist:

$$\text{Sin } A + B = 2\ \text{Sin } \frac{A + B}{2}.\ \text{Cos } \frac{A + B}{2},$$

$$\text{Sin } A + \text{Sin } B = 2\ \text{Cos } \frac{A - B}{2}.\ \text{Sin } \frac{A + B}{2},$$

Sin A

$$\text{Sin } A - \text{Sin } B = 2 \text{ Sin } \frac{A-B}{2} . \text{ Cos } \frac{A+B}{2}$$

Substituiret man, so findet sich

$$x = a. \frac{\text{Cos } \frac{A+B}{2}}{\text{Cos } \frac{A-B}{2}} \text{ und } x = a. \frac{\text{Sin } \frac{A+B}{2}}{\text{Sin } \frac{A-B}{2}}$$

Die Verhältnisse §. 28 zeigen, daß alle Theile eines Dreyeckes AFE bequem durch den Radius des um selbes gelegten Kreises und die Verhältnisse der zu zwey Winkeln coordinirten Größen ausgedrückt werden können.

§. 29. Man multiplicire die §. 21. gefundenen Werthe von Sin $A+B$, Cos $A+B$ mit Sin $A-B$ und Cos $A-B$ §. 22, so findet man, wenn reduciret wird Sin $A+B$. Sin $A-B$ = Cos $A+B$. Cos $A-B$. = Sin ^2A — Sin ^2B = Cos ^2B — Cos ^2A. Also ist: Sin $A+B$: Sin A + Sin B = Sin A — Sin B : Sin $A-B$. Das ist: der Sinus der Summe zweyer Winkel verhält sich zur Summe ihrer Sinus, wie die Differenz ihrer Sinus, zum Sinus ihrer Differenz.

Anmerkung. Die Figur 4 zeigt dieses Verhältniß im Zusammenhange mit den übrigen; denn es ist AP = Sin $A+B$, AO = Sin A + Sin B, OE = Sin A — Sin B, EK = Sin $A-B$, und da die Dreyecke APO und OEK ähnlich sind, so ist

AP : AO = OE : EK.

§. 30. Es sey Fig. 6. AD = 2 Sin A, DE = 2 Sin B, somit AE = 2 Sin $A+B$. Man nehme den Bogen AF = DE, so ist die Sehne AF = DE = 2 Sin B, somit die Sehne EF = 2 Sin $(A+2B)$,

$CM = \text{Cos}\,(A + 2B)$, weil der Durchmesser PQ mit FE parallel ist.

Nun ist $FM = \text{Sin}\,(A + 2B) = FG + GM = FG + AO = 2\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,\overline{A + B} + \text{Sin}\,A$, und $CM = \text{Cos}\,\overline{A + 2B} = OM - CO = AG - AL = 2\,\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,\overline{A + B} - \text{Cos}\,A$, oder $CM = LG = LR - GR = LR - ER.\,\text{Cos}\,GRE$. Da nun $ER = 2\,\text{Cos}\,B$, $LR = AG = OC = \text{Cos}\,A$, und der Winkel $GRE = A + B$ ist, so ist auch $CM = \text{Cos}\,(A + 2B) = \text{Cos}\,A - 2\,\text{Cos}\,B\,\text{Cos}\,\overline{A + B}$.

Anmerkung. Ist $A + 2B$ kleiner als $90°$, so verändern sich die Zeichen des Cosinus, und man hat $\text{Cos}\,(A + 2B) = 2\,\text{Cos}\,B.\,\text{Cos}\,\overline{A + B} - \text{Cos}\,A$.

2te Anmerkung. Setzt man in die Gleichung für Sin und Cos $(A + 2B)$, nA für B, das ist: setzet man $B = nA$, so wird

$$\text{Sin}\,\overline{2n + 1}.A = \text{Sin}\,A + 2\,\text{Sin}\,nA.\,\text{Cos}\,\overline{n + 1}.A.$$
$$\text{Cos}\,\overline{2n + 1}.A = \text{Cos}\,A - 2\,\text{Cos}\,nA.\,\text{Cos}\,\overline{n + 1}.A.$$

Nun kann man für n jede positive Größe setzen, und somit die Sinus der Multiplen der Winkel bestimmen. Es sey z. B. $n = 2$, so wird

$$\text{Sin}\,5\,A = \text{Sin}\,A + 2\,\text{Sin}\,2\,A.\,\text{Cos}\,3\,A.$$
$$\text{Cos}\,5\,A = \text{Cos}\,A - 2\,\text{Cos}\,2\,A.\,\text{Cos}\,3\,A.$$

§. 31. Es sind noch andere Methoden, durch welche man die Sinus der Multipeln eines Winkels finden kann. Da nämlich nach § (21. 22) $\text{Sin}\,\overline{A + B} = \text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,B + \text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,A$; $\text{Cos}\,\overline{A + B} = \text{Cos}\,A\,\text{Cos}\,B - \text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B$ ist, so setze man in der Reihe $B = A = 2A = 3A = nA$ und entwickle die Glieder, so wird

Sin

$\text{Sin } A = \text{Sin } A$

$\text{Cos } A = \text{Cos } A.$

$\text{Sin } 2A = 2 \text{ Cos } A \text{ Sin } A$

$\text{Cos } 2A = \text{Cos}^2 A - \text{Sin}^2 A.$

$\text{Sin } 3A = 3 \text{ Sin } A \text{ Cos}^2 A - \text{Sin}^3 A$

$\text{Cos } 3A = \text{Cos}^3 A - 3 \text{ Cos } A \text{ Sin}^2 A.$

$\text{Sin } 4A = 4 \text{ Cos}^3 A \text{ Sin } A - 4 \text{ Cos } A \text{ Sin}^3 A.$

$\text{Cos } 4A = \text{Cos}^4 A - 6 \text{ Cos}^2 A \text{ Sin}^2 A + \text{Sin}^4 A.$

$\text{Sin } 5A = 5 \text{ Cos}^4 \text{Sin } A - 10 \text{ Cos}^2 A \text{ Sin}^3 A + \text{Sin}^5 A$

$\text{Cos } 5A = \text{Cos}^5 A - 10 \text{ Cos}^3 \text{Sin}^2 A + 5 \text{ Cos } A \text{ Sin}^4 A.$

Um nun das Gesetz zu finden, nach welchem diese Glieder fortlaufen, ordne man die Glieder je zweyer dieser coordinirten Gleichungen nach den Potenzen von Sinus A und Cos A. Man addire Sin und Cos 5 A, so findet man: $\text{Cos}^5 A + 5 \text{ Cos}^4 A \text{ Sin } A - 10 \text{ Cos}^3 A. \text{ Sin}^2 A - 10 \text{ Cos}^2 A \text{ Sin}^3 A + 5 \text{ Cos } A \text{ Sin}^4 A + \text{Sin}^5 A.$ Es sind demnach alle Coefficienten eben dieselben, die man findet, wenn man das Binomium Cos A + Sin A zur fünften Potenz erhebt. Nur daß je zwey Glieder abwechselnd das Zeichen — haben. Will man also Sin 7 A und Cos 7 A haben, so erhebe man Cos A + Sin A zur 7ten Potenz, und es ist: $\text{Cos}^7 A + \cdot \text{Cos}^6 A. \text{Sin } A + 21 \text{Cos}^5 A. \text{Sin}^2 A + 35 \text{Cos}^4 A \text{Sin}^3 A + 35 \text{Cos}^3 A \text{Sin}^4 A + 21 \text{ Cos}^2 A. \text{ Sin}^5 A. + 7 \text{ Cos } A \text{ Sin}^6 A + \text{Sin}^7 A.$

Man ändere die Zeichen des 3ten und 4ten, des 7ten und 8ten Gliedes in —, und theile die Glieder abwechselnd zwischen Cos 7 A und Sin 7 A, so wird

$$\text{Cos } 7A = \text{Cos}^7 A - 21 \text{Cos}^5 \text{Sin}^2 A + 35 \text{Cos}^3 A \text{Sin}^4 A - 7 \text{ Cos } A \text{ Sin}^6 A$$

$$\text{Sin } 7A = 7 \text{ Cos}^6 A. \text{Sin } A. - 35 \text{ Cos}^4 A. \text{Sin}^3 A. + 21 \text{ Cos}^2 A \text{ Sin}^5 A. - \text{Sin}^7 A.$$

§. 32. Da nach §. 24.

$$\text{Sin } A - \text{Sin } B = 2 \text{ Cos } \frac{A + B}{2} . \text{ Sin } \frac{A - B}{2}$$

$$\text{Cos } A - \text{Cos } B = 2 \text{ Sin } \frac{A + B}{2} . \text{ Sin } \frac{A - B}{2} \text{ ist,}$$

so setze man für Sin B nach und nach Sin 2 B, Sin 3 B ꝛc. und subtrahire, so wird:

$$\text{Sin } 2 A - \text{Sin } A = 2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} A . \text{ Cos } \tfrac{3}{2} A.$$

$$\text{Cos } A - \text{Cos } 2 A = 2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} A . \text{ Sin } \tfrac{3}{2} A.$$

$$\text{Sin } 3 A - \text{Sin } 2 A = 2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} A . \text{ Cos } \tfrac{5}{2} A.$$

$$\text{Cos } 2 A - \text{Cos } 3 A = 2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} A . \text{ Sin } \tfrac{5}{2} A.$$

$$\text{Sin } 4 A - \text{Sin } 3 A = 2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} A . \text{ Cos } \tfrac{7}{2} A.$$

$$\text{Cos } 3 A - \text{Cos } 4 A = 2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} A . \text{ Sin } \tfrac{7}{2} A.$$

Man findet auf diese Art die Summe aller dieser Differenzen der in arithmetischer Progression wachsenden Winkel, und auch die Differenzen aller dieser Differenzen; allein da diese Differenzen Reihen bilden, so muß eine bequeme Methode selbe zu summiren in der Folge gezeigt werden.

§. 33. Sind AB, BC, CD die Sehnen der Winkel A, B, C, so ist AC $= 2$ Sin $A + B$, BD $= 2$ Sin $B + C$, AD $= 2$ Sin $A + B + C$. Fig. 5.

Man entwickele Sin $A + B + C$ nach §. 21, so ist

$$\text{Sin} A + B + C = \text{Sin} A \text{Cos} B \text{Cos} C + \text{Sin} B \text{Cos} A \text{Cos} C + \text{Cos} A \text{ Cos} B \text{ Sin} C - \text{Sin} A \text{ Sin} B \text{ Sin} C.$$

Man

Man multiplicire beyde Glieder mit $\sin C$, und addire zu beyden Seiten $\sin A \sin B$, so wird, wenn man reduziret:

I. $\sin A + B + C . \sin C + \sin A \sin B = \sin B + C . \sin A + C.$

Man multiplicire beyde Glieder mit $\sin B$ und addire zu beyden Seiten $\sin A \sin C$, so wird nach der Reduction

II. $\sin A + B + C . \sin B + \sin A \sin C = \sin A + B . \sin B + C.$

Man multiplicire beyde Glieder mit $\sin A$, und addire zu beyden Seiten $\sin B \sin C$, so wird reducendo

III. $\sin A + B + C . \sin A + \sin B \sin C = \sin A + C . \sin A + B.$

Nun sind $2 \sin B + C = BD$, Fig. 5, $2 \sin A + B = AC$, die Diagonalen des in den Kreis eingeschriebenen Trapezes; und man hat aus Nro. I. und III. $\sin A + B + C . \sin C + \sin A \sin B : \sin A + B + C . \sin A + \sin B \sin C = \sin B + C : \sin A + B.$

Daraus folgt folgender Lehrsatz.

In einem Trapeze, das in einen Kreis eingeschrieben ist, verhalten sich die Diagonalen wie die Summe der Rektangel aus den Seiten, die ihre Spitzen berühren.

Aus Nro. II. aber leitet man folgenden Lehrsatz ab. Das Produkt der Diagonalen eines in einen Kreis eingeschriebenen Trapezes ist gleich der Summe der Produkte aus den gegenüberliegenden Seiten; somit ist immer:

I. $AC : BD = AB : AD + BC . CD : AD : CD + BC . AB.$

II. $AC . BD = AB . CD + BC . AD.$

An-

Anmerkung. Verfährt man auf dieselbe Art, um den Cosinus des Winkels $A + B + C$ zu finden, und seine Verhältnisse zu bestimmen, so bekömmt man dasselbe Resultat nur mit negativen Zeichen, und man hat

$$\text{Cos}\, \overline{A + B + C}.\ \text{Cos}\, A - \text{Cos}\, B\ \text{Cos}\, C = - \text{Sin}\, \overline{A + B}.\ \text{Sin}\, \overline{A + C}.$$

§. 34. Betrachtet man B und C als Multiplen von A, so kann man den Sinus des Multiplums jedes Winkels bestimmen. Man setze in der Gleichung Nro. III. $B = C = 2A$, so wird: $\text{Sin}\, 5A = \frac{\text{Sin}^2 3A - \text{Sin}^2 2A}{\text{Sin}\, A}$

Ist $B = 2A$; $C = 3A$, so ist

$$\text{Sin}\, 6A = \frac{\text{Sin}\, 3A\ \text{Sin}\, 4A - \text{Sin}\, 2A\ \text{Sin}\, 3A}{\text{Sin}\, A.}$$

Es ist demnach,

wenn man $B = 0$. $C = 0$ setzt:

$$\text{Sin}\, A = \frac{\text{Sin}^2 A - \text{Sin}^2 0A}{\text{Sin}\, A.}$$

Ist $B = 1A$, $C = 1.A$, so ist

$$\text{Sin}\, 3A = \frac{\text{Sin}^2 2A - \text{Sin}^2 A}{\text{Sin}\, A.}$$

Ist $B = 2A$, $C = 2A$,

$$\text{Sin}\, 5A = \frac{\text{Sin}^2 3A - \text{Sin}^2 2A}{\text{Sin}\, A.}$$

Ist $B = 3A$, $C = 3A$,

$$\text{Sin}\, 7A = \frac{\text{Sin}^2 4A - \text{Sin}^2 3A}{\text{Sin}\, A.} \quad \text{u. s. w.}$$

Also ist

$$\text{Sin}A(\text{Sin}A + \text{Sin}3A + \text{Sin}5A + \text{Sin}7A + \ldots) = \text{Sin}^2 4A.$$

Es

Es ist somit die Summe dieser Sinus, deren Winkel in der Progression 1. 3. 5. 7. wachsen, wenn n die Zahl der Glieder bedeutet $= \frac{\text{Sin}^2 n. A}{\text{Sin } A}$, das ist: die Summe ist die dritte Proportional-Größe zu Sin A und Sin n A.

Ist B = 1 A, C = o A, so ist:

$$\text{Sin } 2 A = \frac{\text{Sin } A \text{ Sin } 2 A - \text{Sin } A \text{ Sin } oA}{\text{Sin } A.}$$

Ist B = 1 A, C = 2 A, so ist:

$$\text{Sin } 4 A = \frac{\text{Sin } 3 A \text{ Sin } 2 A - \text{Sin } 2 A \text{ Sin } A}{\text{Sin } A.}$$

Ist B = 2 A, C = 3 A, so ist:

$$\text{Sin } 6 A = \frac{\text{Sin } 4 A \text{ Sin } 3 A - \text{Sin } 3 A \text{ Sin } 2 A}{\text{Sin } A.}$$

Also: $\text{Sin } 2 A + \text{Sin } 4 A + \text{Sin } 6 A + \text{Sin } 8 A \ldots = \frac{\text{Sin } 5 A. \text{ Sin } 4 A - \text{Sin } 4 A \text{ Sin } 3 A.}{\text{Sin } A.}$

Ist somit n die Zahl der Glieder, so ist ihre Summe

$$\frac{\text{Sin } n + 1. \text{ Sin } n A}{\text{Sin } A.}$$

Addirt man die Summe beyder arithmetischen Progressionen, so wird: $\text{Sin } A + \text{Sin } 2 A + \text{Sin } 3 A \ldots + \text{Sin } 9 A = \frac{(\text{Sin } 5 A + \text{Sin } 4 A) \text{ Sin } 5 A}{\text{Sin } A.}$

Ist also m die Zahl der Glieder, so ist

$$\text{Sin } A + \text{Sin } 2 A + \text{Sin } 3 A \ldots + \text{Sin } m A = \frac{\left(\text{Sin } \frac{m+1}{2} A + \text{Sin } \frac{m-1}{2} A\right) \text{ Sin } \frac{m+1}{2} A}{\text{Sin } A.}$$

An-

Anmerkung. Es lassen sich aus diesen Verhältnissen noch verschiedene andere ableiten, von denen wir einige anführen wollen.

I. Nach §. 24 und §. 26, 2do. ist

$$\mathrm{Sin}\,A - \mathrm{Sin}\,B = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{A+B}{2}.\,\mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}$$

Setzt man in diese Gleichung nach und nach Sin A=nB, so findet man, wenn man subtrahiret:

$$\mathrm{Sin}\,3B - \mathrm{Sin}\,B = 2\,\mathrm{Cos}\,2B.\,\mathrm{Sin}\,B$$
$$\mathrm{Sin}\,5B - \mathrm{Sin}\,3B = 2\,\mathrm{Cos}\,4B.\,\mathrm{Sin}\,B$$
$$\mathrm{Sin}\,7B - \mathrm{Sin}\,5B = 2\,\mathrm{Cos}\,6B.\,\mathrm{Sin}\,B$$
$$\mathrm{Sin}\,9B - \mathrm{Sin}\,7B = 2\,\mathrm{Cos}\,8B.\,\mathrm{Sin}\,B$$

Also ist:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,9B - \mathrm{Sin}\,B}{2\,\mathrm{Sin}\,B} = \mathrm{Cos}\,2B + \mathrm{Cos}\,4B + \mathrm{Cos}\,6B + \mathrm{Cos}\,8B.$$

Eben so ist:

$$\mathrm{Sin}\,2B - \mathrm{Sin}\,0B = 2\,\mathrm{Cos}\,B.\,\mathrm{Sin}\,B$$
$$\mathrm{Sin}\,4B - \mathrm{Sin}\,2B = 2\,\mathrm{Cos}\,3B.\,\mathrm{Sin}\,B$$
$$\mathrm{Sin}\,6B - \mathrm{Sin}\,4B = 2\,\mathrm{Cos}\,5B.\,\mathrm{Sin}\,B$$
$$\mathrm{Sin}\,8B - \mathrm{Sin}\,6B = 2\,\mathrm{Cos}\,7B.\,\mathrm{Sin}\,B$$

Also ist:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,8B}{2\,\mathrm{Sin}\,B} = \mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,3B + \mathrm{Cos}\,5B + \mathrm{Cos}\,7B.$$

Folglich: $\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,2B + \mathrm{Cos}\,3B \ldots + \mathrm{Cos}\,8B =$

$$\frac{\mathrm{Sin}\,9B + \mathrm{Sin}\,8B - \mathrm{Sin}\,B;}{2\,\mathrm{Sin}\,B}$$

und überhaupt: $\mathrm{Cos}\,B \ldots\ldots + \mathrm{Cos}\,nB =$

$$\frac{\mathrm{Sin}\,(n+1)\,B + \mathrm{Sin}.\,nB - \mathrm{Sin}\,B.}{2\,\mathrm{Sin}\,B.}$$

II.

II. Setzt man in der Formel:

$$\text{Cos}\,B - \text{Cos}\,A = 2\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}.\ \text{Sin}\,\frac{A-B}{2},\ \text{§. 24 u. 26. 4to}$$

$\text{Cos}\,A = \text{Cos}\,n\,B$, und subtrahiret, so wird:

$$\text{Cos}\,B - \text{Cos}\,3\,B = 2\ \text{Sin}\,2\,B.\ \text{Sin}\,B$$

$$\text{Cos}\,3\,B - \text{Cos}\,5\,B = 2\ \text{Sin}\,4\,B.\ \text{Sin}\,B \text{ u.s.w.}$$

Verfährt man auf dieselbe Art, wie oben, so findet man:

$$\text{Sin}\,B + \text{Sin}\,2\,B + \text{Sin}\,3\,B + \ldots\ldots \text{Sin}\,n\,B = \frac{1 + \text{Cos}\,B\ \text{Cos}\,n\,B - \text{Cos}\,(n+1)\,B}{2\ \text{Sin}\,B.}$$

III. Man kann die Tangente von $2\,A$, $3\,A, \ldots n\,A$, aus §. 23 finden: dann setzt man in die Formel:

$$\text{Tang}\,A+B = \frac{\text{Tang}\,A + \text{Tang}\,B.}{1 - \text{Tang}\,A\ \text{Tang}\,B.}$$

so hat man: $\text{Tang}\,2\,A = \dfrac{\text{Tang}\ ^2 A}{1 - \text{Tang}^2 A.}$

Setzt man $B = 2\,A$, und substituiret, so ist

$$\text{Tang}\,A + 2\,A = \text{Tang}\,3\,A = \frac{3\ \text{Tang}\,A - \text{Tang}^3 A}{1 - 3\ \text{Tang}^2 A}$$

Ist $B = 3\,A$, so ist: $\text{Tang}\,4\,A = \dfrac{4\,\text{Tang}\,A - 4\,\text{Tang}^3 A}{1 - 6\,\text{Tang}^2 A + \text{Tang}^4 A.}$

Verfährt man auf diese Art weiter, so findet man bald, daß die sämmtlichen Glieder von Tang $n\,A$ die Glieder von $(1 + \text{Tang}\,A)^n$ seyen, und nur in den Verbindungs-Zeichen ein Unterschied sey. Gesetzt also, man wollte Tang $7\,A$ finden, so ist:

$(1 \mp \text{Tang}\,A)^n = 1 \ldots 7\,\text{Tang}\,A \ldots 21\,\text{Tang}^2 A \ldots 35\,\text{Tang}^3 A \ldots 35\,\text{Tang}^4 A \ldots 21\,\text{Tang}^5 A \ldots 7\,\text{Tang}^6 A \ldots \text{Tang}^7 A.$

Also theile man alle ungeraden Glieder dem Nenner, alle geraden dem Zähler zu, und verbinde sie abwech-

selnd

felnd durch die Zeichen $+$ $-$, so ist:

$$\text{Tang}\,7A = \frac{7\,\text{Tang}\,A - 35\,\text{Tang}^3 A + 21\,\text{Tang}^4 A - \text{Tang}^7 A}{1 - 21\,\text{Tang}^2 A + 35\,\text{Tang}^4 A - 7\,\text{Tang}^6 A}$$

§. 35. Da um jedes Dreyeck ein Kreis beschrieben werden kann, so kann auch jede Seite als die Sehne eines Bogens, deren Summe der Peripherie gleich ist, betrachtet werden. Ist AFE, Fig. 4. ein gegebenes Dreyeck, r der Halbmesser des umschriebenen Kreises, der Winkel FAE $=$ B, EFA $=$ A, so ist

$AE = 2r \text{ Sin } A.$

$FE = 2r \text{ Sin } B$

$AF = 2r \text{ Sin } A + B$

Die Höhe $EN = 2r \text{ Sin } A \text{ Sin } B =$
$r.\ (\text{Cos } A - B - \text{Cos } A + B)$

Das Segment $AN = 2r \text{ Sin } A \text{ Cos } B =$
$r.\ (\text{Sin } A + B + \text{Sin } A - B)$

Das andere $NF = 2r \text{ Sin } B \text{ Cos } A =$
$r.\ (\text{Sin } A + B - \text{Sin } A - B.)$

Die Differenz $PN = 2r \text{ Sin } A - B.$

Anmerkung. Die Richtigkeit dieser Verhältnisse ist bereits in obigen Artikeln erwiesen worden.

§. 36. Aus diesen Gleichungen folgen mehrere Verhältnisse. Aus den 3 ersten erhellet: daß sich die Seiten eines Dreyeckes wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel verhalten. Denn
$AE : FE = 2r \text{ Sin } A : 2r \text{ Sin } B = \text{Sin } A : \text{Sin } B.$ 2c.

§. 37. Da §. 29 $\text{Sin } A + B.\ \text{Sin } A - B =$ $\text{Sin } A + \text{Sin } B.\ \text{Sin } A - \text{Sin } B$ ist, so ist auch

2r

$2r\,\mathrm{Sin}\,A+B : 2r\,\mathrm{Sin}\,A + \mathrm{Sin}\,B = 2r\,\mathrm{Sin}\,A - \mathrm{Sin}\,B : 2r\,\mathrm{Sin}\,A-B$
das ist, die Basis AB, Fig. 7. verhält sich zur Summe beyder Seiten (BD + AD) wie die Differenz dieser Seiten (BG) zur Differenz der Segmente (BF).

§. 38. Nach §. 24 muß auch folgendes Verhältniß Statt haben.

$$2r\,\mathrm{Sin}\,A + \mathrm{Sin}\,B : 2r\,\mathrm{Sin}\,A - \mathrm{Sin}\,B = \mathrm{Tang}\,\frac{A+B}{2} . \mathrm{Tang}\,\frac{A-B}{2}$$

das ist: Summe beyder Seiten (AD + BD) verhält sich zur Differenz beyder Seiten, wie die Tangente der halben Summe beyder ihnen gegenüber liegenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

§ 39. Nach §. 29 ist $\mathrm{Sin}\,A+B \times \mathrm{Sin}\,A-B = \mathrm{Sin}^2 A - \mathrm{Sin}^2 B.$

Nun ist $\mathrm{Sin}\,A-B = \mathrm{Sin}\,A+B - 2\,\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Cos}\,A$. §. 35.
Man substituire für $\mathrm{Sin}\,A-B$, so wird:
$\mathrm{Sin}^2 A+B + \mathrm{Sin}^2 B - \mathrm{Sin}^2 A = 2\,\mathrm{Sin}\,A+B . \mathrm{Sin}\,B . \mathrm{Cos}\,A.$
Multiplicirt man beyde Glieder mit $4r^2$, so hat man

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{4r^2.(\mathrm{Sin}^2 A+B + \mathrm{Sin}^2 B - \mathrm{Sin}^2 A)}{8r^2\ (\mathrm{Sin}\,A+B.\ \mathrm{Sin}\,B)},$$

Ist demnach Fig. 7:
$AB = 2r\ \mathrm{Sin}\,A+B,\ AD = 2r\,\mathrm{Sin}\,B,\ BD = 2r\ \mathrm{Sin}\,A,$
so ist $\mathrm{Cos}\ A = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2\,AB.\,AD.}$

§. 40. Aufgabe. Es ist Fig. 7. die Seite $BD = a$, $AD = b$, und der Winkel $BAD = A$ gegeben. Man soll das Dreyeck bestimmen.

Auf-

Auflösung. Es ist demnach $2r \operatorname{Sin} A = a$; $2r \operatorname{Sin} B = b$; somit kennt man den Durchmesser des umschriebenen Kreises, oder $2r = \frac{a}{\operatorname{Sin} A}$; somit ist:

$$\operatorname{Sin} B = \frac{b}{a} . \operatorname{Sin} A, \text{ und } \operatorname{Cos} B = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{Sin}^2 A}}{a}.$$

Nun ist die dritte Seite $= AB = AE + EA = a \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A$; substituirt man für $\operatorname{Cos} B$, so wird $AB = b \operatorname{Cos} A + \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{Sin}^2 A}$.

Anmerkung. Wird $b^2 \operatorname{Sin}^2 A$ größer, als a^2, so zeigt das negative Zeichen unter der Wurzel-Größe nicht eine eingebildete Größe an, sondern, daß $b \operatorname{Sin} A$ niemals größer als a seyn könne; denn $b \operatorname{Sin} A$ ist die Höhe des Dreyeckes, und kann also nie größer seyn, als die eine der Seiten des Dreyeckes, zwischen welchen diese Höhe liegt.

§. 41. Aufgabe. Es sind in einem Dreyecke zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben. Man soll das Dreyeck bestimmen.

Auflösung. Man mache die größere der gegebenen Seiten zur Basis, sie sey $= c$; die andere Seite sey $= b$; der eingeschlossene Winkel sey A. Man hat demnach: $c = 2r \operatorname{Sin} \overline{A + B}$, $b = 2r \operatorname{Sin} B$. Man dividire beyde Gleichungen durch einander, so hat man

$$\frac{c}{b} = \frac{\operatorname{Sin} \overline{A + B}}{\operatorname{Sin} B} = \operatorname{Sin} A \operatorname{Cot} B + \operatorname{Cos} A.$$

also $\operatorname{Cot} B = \frac{c - b \operatorname{Cos} A}{b \operatorname{Sin} A}$;

ate

2te Auflösung. Nach §. 38 hat man folgendes Verhältniß:

$c + b : c - b = (\text{Tang } \frac{180^\circ - A}{2}) :$ Tang ½ Differenz der zwey übrigen Winkel.

3te Auflösung. Da in der Gleichung §. 39 $AB = c$, $AD = b$, und $\text{Cos } A$ bekannt sind, so findet man die Seite $BD = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A}$.

§. 42. Aufgabe. Es ist die Basis AB, Fig. 7. $= c$, es sind die anliegenden Winkel A und B gegeben. Man soll das Dreyeck bestimmen.

Auflösung. Da man zwey Winkel A und B kennt, so kennt man auch $A + B$. Nun ist $c = 2r \text{ Sin } A + B$, also kennt man auch $2r$, den Durchmesser des umschriebenen Kreises. Da nun $BD = 2r \text{ Sin } A$, $AD = 2r \text{ Sin } B$ ist, so hat man, wenn man für $2r$ substituiret, $BD = \frac{c \text{ Sin } A}{\text{Sin } A + B}$; $AD = \frac{c \text{ Sin } B}{\text{Sin } A + B}$, die Höhe $DE = \frac{c \text{ Sin } A \text{ Sin } B}{\text{Sin } A + B}$, und endlich den Inhalt $= \frac{c^2 \text{ Sin } A . \text{ Sin } B}{2 \text{ Sin } A + B}$.

§. 43. Es sind die 3 Seiten $BD = a$, $AD = b$, $AB = c$ gegeben. Man soll alles übrige bestimmen.

Auflösung. Aus §. 39 findet man Cos A, da AB, AD und BD gegeben sind, und es ist: $\text{Cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; allein diese Gleichung ist für

den

den Gebrauch der Logarithmen unbequem. Man kann selbe aber für diesen Gebrauch bequem machen, wenn man zu beyden Seiten 1 addirt, oder diese Größen von 1 subtrahirt. Man hat sodann:

$$\frac{1+\mathrm{Cos}A}{2}=\frac{b^2+2bc+c^2-a}{4bc}=\frac{(b+c+a).(b+c-a)}{4bc}$$

$$\frac{1-\mathrm{Cos}A}{2}=\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{4bc}=\frac{(a-(b-c)).(a+(b-c))}{4bc.}$$

Also ist $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(b+c+a).(b+c-a);}{2bc}}$

$$\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c.)(a+c-b)}{2bc}}$$

somit: $\mathrm{Sin}\,A=\frac{\sqrt{(a+b+c.)(a+b-c.)(a+c-b.)(b+c-a)}}{2bc}$

Da nun $a=2r\ \mathrm{Sin}\,A$ ist, so wird

$$r=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c.)(a+b-c.)(a+c-b.)(b+c-a.)}}$$

Da endlich die Höhe $DE=DA\ \mathrm{Sin}\,A=b\ \mathrm{Sin}\,A$, so ist der Inhalt, oder

$$\frac{AB.\ AD\ \mathrm{Sin}\,A}{2}=\frac{bc\ \mathrm{Sin}\,A}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+b+c.)(a+b-c.)(a+c-b.)(b+c-a)}}{4.}$$

§. 44. **Aufgabe.** Alles bleibt wie zuvor. Man soll den Radius des Kreises bestimmen, der alle drey Seiten berührt.

Auflösung. $CE=CF=CG$ sey der Radius dieses Kreises $=R$. Ist nun $BD=a$, $AD=b$, $AB=C$, so

so sind die Seiten a, b, c Tangenten in G, F, E, und die Halbmesser CG, CE, CF stehen senkrecht auf selben. Es wird somit $\frac{AB.CG}{2} = \triangle ABC$, $\frac{BD.CF}{2} = \triangle BCD$, und $\frac{AD.CE}{2} = \triangle ACD$, also ist

$\frac{R.a+b+c}{2}$ = dem Flächen-Inhalte des Dreyeckes ABD.

Es ist somit

$$\frac{R.a+b+c}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c.)(a+b-c.)(a+c-b.)(b+c-a.)}{4.}}$$

also; $R = \frac{\sqrt{(a+b+c.)(a+b-c.)(b+c-a.)(a+c-b)}}{2.a+b+c}$

$$= \frac{\sqrt{(a+b-c.)(a+c-b.)(b+c-a)}}{2\sqrt{a+b+c.}}$$

Anmerk. Es ist $AG = AE = R \operatorname{Cot} CAG = R \operatorname{Cot} \frac{A}{2} = R.\frac{\sqrt{1+\operatorname{Cos} A}}{\sqrt{1-\operatorname{Cos} A.}}$, denn die Dreyecke GCA, ECA haben zwey gleiche Seiten, und einen gleichen Winkel, also sind sie einander ähnlich und gleich; also ist der Winkel $GAC = CAE = \frac{GAE}{2} = \frac{A.}{2}$

Da nun nach §. 43 die Werthe von $1-\operatorname{Cos} A$ und $1+\operatorname{Cos} A$ zu finden sind, so wird:

$$AG = \frac{\sqrt{a+b-c.\,a+c-b.\,b+c-a.}}{2\sqrt{a+b+c}} \cdot \frac{\sqrt{a+b+c.\,b+c-a.}}{\sqrt{a+b-c.\,a+c-b}}$$

und somit, wenn man reduciret: $AG = \frac{b+c-a.}{2}$

Eben so findet man $BG = \frac{a+c-b}{2}$, $FD = \frac{a+b-c}{2}$.

§. 45.

§. 45. Aufgabe. Es sey H die Höhe, P der Perimeter oder Umkreis, D^2 der Inhalt, C die Basis, $A+B$ der ihr gegenüber liegende Winkel. Wenn von diesen Größen drey gegeben sind, seyen die übrigen zu finden, und das Dreyeck zu bestimmen.

Auflösung. Die drey gegebenen Größen dürfen nicht zugleich Inhalt, Höhe und Basis seyn, denn sonst sind nur zwey gegeben, indem $\frac{HC}{2} = D^2$ ist. Für die übrigen Fälle verfahre man folgender Massen.

Es ist $P = 2r\,(\text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B + \text{Sin}\,\overline{A+B})$, also:

$$P - C = P - 4r\,\text{Sin}\,\overline{A+B} =$$
$$2r.\,(\text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B - \text{Sin}\,\overline{A+B}.)$$ Folglich
$$(P - C).\,P = (P - 4r.\,\text{Sin}\,\overline{A+B}).\,P$$
$$= 4r^2\,((\text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B)^2 - \text{Sin}^2\,\overline{A+B}).$$

Man setze für $\text{Sin}^2\overline{A+B}$, $(\text{Sin}A\,\text{Cos}B + \text{Sin}B\,\text{Cos}\,A)^2$; so hat man $P^2 - P.\,(4r.\,\text{Sin}\,\overline{A+B}) =$

$$4r^2(\text{Sin}^2A + 2\,\text{Sin}A\,\text{Sin}B + \text{Sin}^2B - \text{Sin}^2A\,\text{Cos}^2B -$$
$$2\,\text{Sin}\,A\,\text{Cos}\,A\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}B - \text{Sin}^2\,B\,\text{Cos}^2\,A).$$

Man substituire für Cos^2B, $1-\text{Sin}^2B$; für Cos^2A, $1-\text{Sin}^2A$, und reducire, so wird:

$$8r^2\,\text{Sin}A\,\text{Sin}B.\,(1 - \text{Cos}\,\overline{A+B}) = P^2 - 4r\,\text{Sin}\overline{A+B}.\,P.$$

Da nun $2r\,\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B = H$, so wird:

$$2r = \frac{P^2}{2P\,\text{Sin}\,\overline{A+B} + 2H.(1-\text{Cos}\,\overline{A+B})}$$

somit:

$$2r\text{Sin}\overline{A+B} = C = \frac{P^2\,\text{Sin}\,\overline{A+B}}{2P\text{Sin}\overline{A+B}. + 2H\,(1-\text{Cos}\overline{A+B})} =$$
$$\frac{P^2}{2P + 2H.\left(\frac{1-\text{Cos}\overline{A+B}}{\text{Sin}\,\overline{A+B}}\right)}$$

oder

oder $C = \frac{P^2}{2P + 2H \operatorname{Tang} \frac{A+B}{2}}$

und somit $D^2 = \frac{CH}{2} = \frac{P^2.H}{4.(P+H \operatorname{Tang} \frac{A+B}{2})}$

Aus diesen Gleichungen können immer die zwey unbekannten gefunden werden, wenn die drey übrigen gegeben sind. Will man aber auch die Winkel bestimmen, so blicke man auf die Figur 7, und man wird finden, daß

$$P = AE + DA + BE + DB =$$
H (Cot A + Cot B + Cosec A + Cosec B) sey.

Nun ist $\operatorname{Cot} A + \operatorname{Cosec} A = \operatorname{Cot} \frac{A}{2}$

$$\operatorname{Cot} B + \operatorname{Cosec} B = \operatorname{Cot} \frac{B}{2}$$

also ist $P = H. \operatorname{Cot} \frac{A}{2} + \operatorname{Cot} \frac{B}{2}$

Es ist aber $\operatorname{Cot} \frac{A}{2} + \operatorname{Cot} \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{A}{2}. \operatorname{Sin} \frac{B}{2}}$

und $\operatorname{Sin} \frac{A}{2}. \operatorname{Sin} \frac{B}{2} = \frac{1}{2} (\operatorname{Cos} \frac{A-B}{2} - \operatorname{Cos} \frac{A+B}{2})$, also

$$P = 2. H. \frac{\operatorname{Sin} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{A-B}{2} - \operatorname{Cos} \frac{A+B}{2}}$$

also: $\operatorname{Cos} \frac{A-B}{2} = \frac{2H \operatorname{Sin} \frac{A+B}{2} + P \operatorname{Cos} \frac{A+B}{2}}{P}$

 und

und somit kennt man die Summe der zwey Winkel, und die Differenz derselben.

§. 46. Aufgabe. Es sind zwey Winkel A u. B, und die Höhe H, oder der Perimeter P, oder der Inhalt D^2 gegeben.

Auflösung. Ist die Höhe H gegeben, so ist: $2r \text{ Sin } A \text{ Sin } B = H$, somit $2r \text{ Sin } A = \frac{H}{\text{Sin } B}$, $2r \text{ Sin } B = \frac{H}{\text{Sin } A}$. Man kennt also die Seiten.

Ist der Perimeter gegeben, so ist

$P = 2r \text{ Sin } A + \text{Sin } B + \text{Sin } \overline{A + B}$,

folglich $2r \text{ Sin } A = \frac{P \text{ Sin } A}{\text{Sin } A + \text{Sin } B + \text{Sin } \overline{A + B}}$.

Man kennt also die Seiten.

Da nun $\text{Sin } A + \text{Sin } B + \text{Sin } \overline{A + B} = 4 \text{ Cos } \frac{A}{2} . \text{ Cos } \frac{B}{2} . \text{ Sin } \frac{A + B}{2}$, denn es ist:

$\text{Sin } A + \text{Sin } B = 2 \text{ Sin } \frac{A + B}{2} . \text{ Cos } \frac{A - B}{2}$, und

$\text{Sin } \overline{A + B} = 2 \text{ Sin } \frac{A + B}{2} . \text{ Cos } \frac{A + B}{2}$, endlich

$\text{Cos } \frac{A - B}{2} + \text{Cos } \frac{A + B}{2} = 2 \text{ Cos } \frac{A}{2} . \text{ Cos } \frac{B}{2}$,

so ist auch

$$2r \text{ Sin } A = \frac{P \text{ Sin } A}{4 \text{ Cos } \frac{A}{2} . \text{ Cos } \frac{B}{2} \text{ Sin } \frac{A + B}{2}}$$

$$= \frac{P . \text{ Sin } \frac{A}{2}}{2 \text{ Cos } \frac{B}{2} \text{ Sin } \frac{A + B}{2}}.$$

Ist

Ist D^2 gegeben, so ist

$2r^2 \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} \overline{A+B} = D^2$, somit

$$2r \operatorname{Sin} A = \frac{D. \operatorname{Sin} A \sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} \overline{A+B}}}$$

$$= \frac{D. \sqrt{2. \operatorname{Sin} A}}{\sqrt{\operatorname{Sin} B. \operatorname{Sin} \overline{A+B}}}.$$

§. 47. **Aufgabe.** Inhalt, Seiten und Winkel des Trapezes ABEF Fig. 9. sind gegeben. Man verlangt eine Linie, welche den nten Theil dieses Trapezes abschneide, und durch einen gegebenen Punkt D gehe.

Auflösung. Von einem Ecke des Trapezes, als B ziehe man durch D die Linie BG, und berechne den Inhalt des Dreyeckes BGF. Dieses Dreyeck sey größer oder kleiner, als der nte Theil des Trapezes, und HC sey die Linie, welche gerade den nten Theil abschneidet. Man muß also die Lage der Linie CDH kennen lernen, und diese ist gefunden, wenn man den Winkel GDH = BDC = X kennet. Denn man kennt den Winkel CBD = B, die Seite DB = a; kennt man also auch den Winkel X, so hat man im Dreyecke CBD zwey Seiten und einen Winkel.

Im Dreyecke GDH kennt man auch die Seite GD = b, den Winkel DGH = G, den Inhalt des Dreyeckes BCD $= \frac{a^2 \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} X}{2. \operatorname{Sin} \overline{B+X}}$

Der Inhalt des Dreyeckes GDH $= \frac{b^2 \operatorname{Sin} G \operatorname{Sin} X}{2. \operatorname{Sin} \overline{G+X}}.$

Nun ist $\frac{\operatorname{Sin} \overline{B+X}}{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} X} = \operatorname{Cot} B + \operatorname{Cot} X;$

$\frac{\operatorname{Sin} \overline{G+X}}{\operatorname{Sin} G. \operatorname{Sin} X} = \operatorname{Cot} G + \operatorname{Cot} X.$

 Nimmt

Nimmt man demnach d^2 den Unterschied der Dreyecke CBD, GDH,

so ist: $d^2 = \frac{a^2}{\text{Cot}\,B + \text{Cot}\,x} - \frac{b^2}{\text{Cot}\,G + \text{Cot}\,x}$,

woraus man Cot x durch eine Aequation vom 2ten Grade findet.

Anmerkung. Ungeübten wird nicht beym ersten Blicke einleuchten, daß d^2 gegeben sey. Für diese dient folgendes zur Erläuterung. Es ist der Inhalt des Dreyeckes BGF, und auch der Inhalt des Trapezes CHBF gegeben. Es ist aber □ Inhalt BCHF $=$ △ BGF $+$ △ CDB $-$ △ GDH $=$ △ BGF $- d^2$, also ist auch d^2 gegeben.

§. 48. Aufgabe. Es sind Fig. 10. die Distanzen der 3 Punkte A, B, C gegeben. Man will wissen, wie weit sie vom Punkte D abstehen, aus dem man sie betrachtet.

Auflösung. Man messe die Winkel $ADB = F$, $BDC = G$. Es sey $AB = a$, $BC = b$, der Winkel $ABC = C$. Den unbekannten Winkel ABD nenne man X, so ist der Winkel $DBC = C - X$. Kennt man also den Winkel X, so kennt man im Dreyecke ABD die Seite AB, den Winkel F, den Winkel X, somit 2 Winkel und eine Seite, folglich ist die Seite AD bestimmt, wenn man nur zugleich weiß, ob B die Spitze des Dreyeckes dies oder jenseits der Linie AC liegt.

Im Dreyecke ABD ist: $\text{Sin}\,F : a = \text{Sin}\,F + X : BD$.

Im Dreyecke BDC ist: $\text{Sin}\,G : b = \text{Sin}\,G + C - X : BD$,

also ist: $b\,\text{Sin}\,F : a\,\text{Sin}\,G = \text{Sin}\,F + X : \text{Sin}\,G + C - X$.

Man dividire die Glieder rechter Hand mit Cos X, so wird

b Sin

$$b \text{ Sin } F : a \text{ Sin } G = (\text{Sin} F + \text{Cos} F.) \text{ Tang } x :$$
$$\text{Sin } (G + C + \text{Cos } G + C.) \text{ Tang } x.$$

Folglich $\text{Tang } x = \dfrac{a \text{ Sin } G \text{ Sin } F - b \text{ Sin } F \text{ Sin } G + C}{b \text{ Sin } F \text{ Cos } G + C - a \text{ Sin} G. \text{Cos} F.}$

Anmerkung. Diese Aufgabe kann auch folgender Massen aufgelöset werden. Man nenne den Winkel BAD, X, alles übrige bleibt wie zuvor, so ist der Winkel $BCD = 360° - F - G - X - C$. Man setze $360° - F - G - C = S$, so ist der Winkel $BCD = S - X$. Diesemnach ist

$$DB : \text{Sin } x = AB : \text{Sin } F = a : \text{Sin } F.$$
$$DB : \text{Sin } S - x = BC : \text{Sin } G = b : \text{Sin } G.$$ Also
$$\frac{\text{Sin } x}{\text{Sin } S - x} = \frac{b \text{ Sin } F}{a \text{ Sin } G.}$$

Man dividire Zähler und Nenner durch Sin x, so wird
$$\text{Cot } x = \frac{a \text{ Sin } G + b \text{ Sin } F \text{ Cos } S}{b \text{ Sin } F \text{ Sin } S.}$$

Folglich ist:
$$\text{Sin } x = \frac{b \text{ Sin } F \text{ Sin } S}{\sqrt{a^2 \text{Sin}^2 G + 2ab \text{Sin } G \text{Sin} F \text{ Cos} S + b^2 \text{Sin}^2 F}}$$

und somit
$$DB = \frac{a\, b \text{ Sin } S}{\sqrt{a^2 \text{Sin}^2 G + 2ab \text{Sin} G \text{Sin} F . \text{Cos } S + b^2 \text{Sin}^2 F.}}$$

§. 49. Aufgabe. Man kennt die Linie $BC = b$. Fig. 10. Im Standpunkte D werden die Winkel $ADB = F$, $BDC = G$; im Standpunkte A die Winkel $BAC = K$, und $CAD = H$ gemessen. Man soll die Distanzen AC, AB, AD, DC ꝛc. bestimmen.

Auflösung. Im Drenecke ADC ist:
$$\text{Sin } F + G + H : \text{Sin } F + G = AD : AC.$$

Im

Im Dreyecke ABD. $\text{Sin}\,F+H+K:\text{Sin}\,F=AD:AB$.
Also ist $\frac{\text{Sin}\,F+G.\ \text{Sin}\,F+H+K}{\text{Sin}\,F.\ \text{Sin}\,F+G+H}=\frac{AC}{AB}$.

Man kennt demnach im Dreyecke ABC das Verhältniß der Seiten AC und AB, und der ihnen überliegenden Winkel ABC, BCA; den gegebenen Winkel $BAC=K$, und die gegebene Seite BC. Man findet demnach nach Anleitung §. 25. Anmerk. die halbe Differenz der beyden unbekannten Winkel, und da ihre halbe Summe $=180°-K$ gegeben ist, so kennt man diese Winkel selbst; durch diese findet man nun die Distanzen AB, AC rc.

§. 50. Aufgabe. In der sechsseitigen Fläche Fig. 11. sind die Winkel A, B, C, D und die Seiten $FA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CD=d$, $DE=e$ gegeben. Man soll den Inhalt des Hexagons bestimmen.

Auflösung. Man verlängere AB und ziehe FQ senkrecht, so ist

$$\triangle FAB=\frac{AB.FQ}{2}=\frac{b.a\ \text{Sin}\ A}{2}.$$

Man verlängere BC, und ziehe FP senkrecht auf BC, auch AV senkrecht auf FP, so ist $FP=FV+VP$, und da der Winkel $FAV=FAQ+QAV=FAQ+ABU$ ist, so ist $FP=a\,\text{Sin}\,(A+B)+\text{Sin}\,B$, also:

$$\triangle FBC=\frac{ac}{2}\ \text{Sin}\,(A+B)+\frac{bc}{b}\ \text{Sin}\,B.$$

Man verlängere CD, und ziehe FO senkrecht, so ist $FO=FS+AX+BZ$. Nun ist der Winkel $VAS=BCZ$, folglich $FAS=A+B+C$, der Winkel $ABX=ABP+PBX=ABP+BCZ=B+C$ also ist $FO=a\,\text{Sin}(A+B+C+)\ b(\text{Sin}\,B+C)+C\,\text{Sin}\,C$,

also

also:

$$\triangle FCD = \frac{ad}{2}\,\text{Sin}\,(A+B+C.)\ \frac{bd}{2}\,\text{Sin}\,(B+C+)\ \frac{cd}{2}\,\text{Sin}\,C.$$

Man verlängere DE und ziehe FG senkrecht, so ist:

$$FG = FK + AL + BM + CN =$$
$$a\,\text{Sin}\,(A + B + C + D) + b\,\text{Sin}\,(B + C + D) + c\,\text{Sin}\,(C + D) + d\,\text{Sin}\,D.$$

Also: $\triangle FDE = \frac{ae}{2}\,\text{Sin}(A+B+C+D) + \frac{be}{2}\,\text{Sin}(B+C+D)$

$$+ \frac{ce}{2}\,\text{Sin}\,(C + D) + \frac{dc}{2}\,\text{Sin}\,D.$$

Da nun der Inhalt dieser vier Dreyecke dem Hexagone gleich ist, so ist der Inhalt des Hexagons $= \frac{ae}{2}\,\text{Sin}\,(A + B + C + D) + \frac{be}{2}\,\text{Sin}\,(B + C + D)$

$$+ \frac{ce}{2}\,\text{Sin}\,(C + D) + \frac{de.}{2}\,\text{Sin}\,D.$$
$$+ \frac{ad}{2}\,\text{Sin}\,(A + B + C) + \frac{bd}{2}\,\text{Sin}\,(B + C) + \frac{cd}{2}\,\text{Sin}\,C.$$
$$+ \frac{ac}{2}\,\text{Sin}\,(A + B) + \frac{bc.}{2}\,\text{Sin}\,B$$
$$+ \frac{ab}{2}\,\text{Sin}\,A.$$

1te Anmerk. Man kennt also den Inhalt jedes Poligons, wenn alle Seiten weniger einer, und alle Winkel weniger zwey gegeben sind.

2te Anmerk. Wird ein Winkel größer als 180 Grade, so wird der Sinus negativ, und die mit selber verbundene Größe muß abgezogen werden.

3te Anmerk. Setzt man alle Winkel = A, alle Seiten = a, so wird die Summe aller Dreyecke des Poligons $= \frac{a^2}{2}. \text{Sin}.\, \overline{n A} + 2 \,\text{Sin}\, \overline{n - 1\, A} + 3\, \text{Sin}\, \overline{n - 2\, A}$

$+ 4\, \text{Sin}\, \overline{n - 3\, A} \ldots + n\, \text{Sin}\, A.$

§. 51. Aufgabe. Die Trisektion eines gegebenen Winkels FCB (Fig. 12.) verrichten.

Auflösung. Auf ein Lineal trage man die Größe des Diameters des um das Centrum C beschriebenen Kreises, errichte die Perpendikular-Linie CG: und lege das Linial so, daß der Theil desselben, welcher die verlängerten Horizontal- und Perpendikular-Diameter fällt, d. i. CG = AB sey; die Flucht des Linials aber die Spitze des Winkels in F treffe, so ist der Winkel GDB = $\frac{1}{3}$ FCB.

Beweis. Wenn sich ein Stab DG = 2 DE = 2 EG = 2 AC zwischen den Schenkeln DC, CG eines rechten Winkels bewegt, so beschreibt der Punkt E einen Kreis vom Radius AC; denn es ist DC = DG. Cos GDC = 2 ED. Cos GDC. Theilt man also DC in zwey gleiche Theile, und ziehet EC, so muß EC = ED seyn. Es sind also die Dreyecke DEC, und ECF gleichschenklicht. Folglich der Winkel FEC = EFC = 2 EDC, somit der Winkel FCB = FDC + DFC = FDC + 2 FDC = 3 FDC.

§. 52. Aufgabe. Zwischen zwey Linien AB und BC zwey mittlere Proportional-Linien zu finden. Fig. 13.

Aufl.

Auflösung. Mit dem Radius AB beschreibe man einen Kreis, und trage den Halbmesser in der Peripherie herum, so sind die Winkel FBA = FBG = GBC = 60 Grade.

Man nehme ein Winkel-Linial, dessen Winkel B = 60 Grade sey, und dessen Schenkel, wie in Fig. 14. mit einer genauen Scala versehen sind. In A und C befestige man zwey sehr feine Stifte, und schiebe das Winkel-Linial zwischen selben, so daß die Theile der Schenkel, welche von den Linien FB, GB abgeschnitten werden, einander gleich seyen; bezeichne dann die Durchschnitts-Punkte D und E, so sind DB und EB die mittleren Proportional-Linien zwischen AB und BC.

Beweis. Man setze, sie seyen die gesuchten mittleren Proportional-Größen, so müssen die Dreyecke ADB, DBE, und EBC einander ähnlich seyn, denn die Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen, stehen in geometrischer Progression.

Verlängert man die beyden Seiten AD, EC, so schneiden sie sich in einem Punkte H, und bilden mit DE ein Dreyeck HDE.

Nun ist der Winkel HDB = DAB + DBA = DAB + 60°. Es ist aber der Winkel EDB = DAB, also ist der Winkel HDE = HDB — EDB = 60°. Eben so ist der Winkel HEB = ECB + EBC = ECB + 60°. Es ist aber der Winkel ECB = DEB, also ist HED = HEB — ECB = 60°.

Es

Es ist also das Dreyeck HDE unter diesen Voraussetzungen ein gleichseitiges. Nun ist aber ex Constructione das Dreyeck HDE ein gleichschenklichtes, und hat in H einen Winkel von 60 Graden, also ist es auch ex Constructione ein gleichseitiges. Folglich sind die durch diese Construction gefundenen Linien DB, BE die gesuchten zwey mittleren Proportional-Linien.

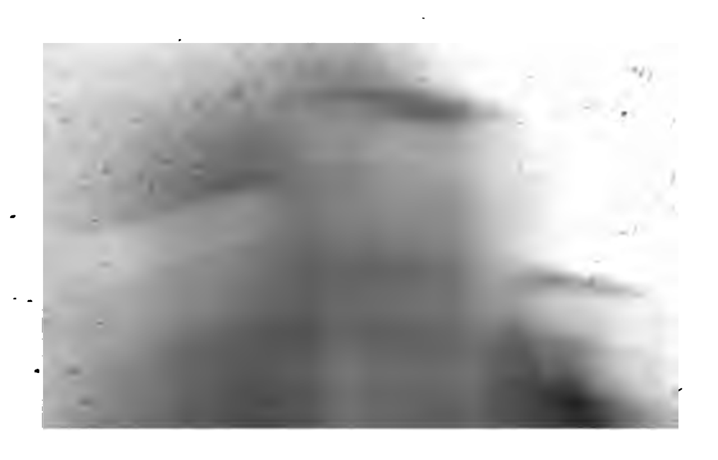
An-

Anleitung

zur

spährischen

Trigonometrie.



Anleitung
zur
sphärischen Trigonometrie.

§. 1. Wenn drey ebene Flächen, die miteinander nicht parallel sind, eine Kugel so schneiden, daß jede durch den Mittelpunkt derselben geht, so theilen sie die Kugel in 8 dreyeckigte Pyramiden, deren Kanten die Halbmesser der Kugel sind, und deren Basis ein dreyeckigtes Stück der Oberfläche der Kugel ist.

§. 2. Jede Fläche, die durch den Mittelpunkt einer Kugel geht, theilt selbe in zwey gleiche Theile. Der Schnitt wird ein größter Kreis genannt. Der Punkt, der auf der Kugel-Fläche um 90 Grade von jedem Punkte eines größten Kreises absteht, wird sein Pol genannt. Jeder größte Kreis hat also zwey Pole und eine Linie, die durch beyde Pole gehet; gehet auch durch den Mittelpunkt des Kreises, und stehet senkrecht auf der Kreisfläche.

§. 3. Zwey größte Kreise, die sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden, halbiren sich wechselseitig.

Um

Um ihre Neigung zu bestimmen, denke man sich einen dritten größten Kreis, der die beyden anderen in Quadranten zerlegt. Der Bogen dieses Kreises, der zwischen die zwey Flächen fällt, mißt die Neigung derselben. Die Durchschnitts-Linie der beyden Kreis-Flächen ist also die Axe desjenigen, auf dem die Grade der Neigungs-Winkel bestimmt werden.

§. 4. Zwey schneidende Flächen bilden 4 Winkel, von denen die entgegengesetzten einander gleich sind, die anliegenden einander zu 180 Graden suppliren.

§. 5. Man denke an dem Ende-Punkten der Durchschnitts-Linie zweyer größten Kreisflächen zwey Tangenten, welche in den Kreisflächen liegen, so wird die Neigung dieser beyden Linien so groß seyn, als die Neigung der Flächen selbst. Zieht man in den Kreisflächen selbst zwey Linien senkrecht auf irgend einen Punkt der Durchschnittslinie, so ist auch ihre Neigung gleich der Neigung der Kreisflächen. Diese Sätze sind aus der Elementar-Geometrie bekannt.

§. 6. Man denke sich in den beyden Kreisflächen zwey Linien, die auf demselben Punkte der Durchschnittslinie senkrecht stehen. Diese beyden gleichen Linien werden die Cosinus eines bestimmten Winkels am Centrum seyn. Sie bilden somit ein gleichschenklichtes Dreyeck. Bedeutet C den Winkel am Centrum, N den Neigungs-Winkel; so ist die dritte Seite $= 2 \text{ Cos } C. \text{ Sin } \frac{N.}{2}$

Diese dritte Seite bleibe unverändert, und man betrachte selbe als Basis. Von ihren auf der Kugelfläche liegenden

Anleitung
zur
sphärischen
Trigonometrie.

§. 1. Wenn drey ebene Flächen, die miteinander nicht parallel sind, eine Kugel so schneiden, daß jede durch den Mittelpunkt derselben geht, so theilen sie die Kugel in 8 dreyeckigte Pyramiden, deren Kanten die Halbmesser der Kugel sind, und deren Basis ein dreyeckigtes Stück der Oberfläche der Kugel ist.

§. 2. Jede Fläche, die durch den Mittelpunkt einer Kugel geht, theilt selbe in zwey gleiche Theile. Der Schnitt wird ein größter Kreis genannt. Der Punkt, der auf der Kugel-Fläche um 90 Grade von jedem Punkte eines größten Kreises absteht, wird sein Pol genannt. Jeder größte Kreis hat also zwey Pole und eine Linie, die durch beyde Pole gehet; gehet auch durch den Mittelpunkt des Kreises, und stehet senkrecht auf der Kreisfläche.

§. 3. Zwey größte Kreise, die sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden, halbiren sich wechselseitig.

Um

beyden anderen Sectoren oder selbem zusammen, so werden bey der Zusammensetzung die Punkte A und C zusammenfallen, und ein Kugeldreyeck entstehen, dessen Seiten die drey Sectoren seyn werden.

§. 10. Die drey Sektoren werden mehr oder weniger gegen einander geneignet seyn, je nachdem selbe bestimmte Verhältnisse unter sich haben. In diesem Sektoren-Kugeldreyecke hat man also die Größe der Winkel ACB, BCD, DCE, und die Größe der Neigungs-Winkel der Sektoren gegen einander zu bestimmen. Die Trigonometrie lehrt drey dieser Größen bestimmen, wenn die drey übrigen gegeben sind.

§. 11. Aus obigen folgt:

I. daß die drey Seiten eines Kugeldreyeckes zusammen nicht so groß seyn können, als die Kreisfläche, aus der sie entstehen.

II. Daß die Summe zweyer Seiten eines Kugel-Dreyeckes größer seyn müsse, als die dritte; denn sonst könnte bey der Zusammenlegung der Punkt A niemals den Punkt E berühren.

III. Daß keine Seite einer halben Kreisfläche gleich seyn könne; denn alsdann müßten die zwey übrigen größer seyn, als eine halbe Kreisfläche, und somit die Summe aller drey Seiten größer, als die ganze Kreisfläche.

IV. Daß die Summe aller drey Neigungs-Winkel kleiner, als sechs rechte Winkel seyn müße; denn wären sie 6 rechten Winkeln gleich, so müßte der Neigungs-Winkel zweyer Seiten zwey Rechten-Winkeln gleich seyn, und somit lägen sie in derselben Fläche.

V.

V. Daß keiner der drey Neigungs-Winkel zwey rechten Winkeln gleich seyn könne

VI. Daß die Summe der drey Neigungs-Winkel größer sey, als zwey rechte Winkel.

Note. Dieser letzte Artikel wird auf eine sehr schwer zu fassende Art erwiesen. Folgender Beweis ist leichter.

Bey der Zusammenlegung bilden die drey Sehnen der Sektoren, nämlich die Linien AB, BD, DE, einen Triangel, dessen Winkel zusammen 180 Grade betragen. Nun ist §. 6. erwiesen worden, daß der Neigungs-Winkel zweyer Flächen größer sey, als der Winkel, den zwey Sehnen dieser Flächen bilden, also muß die Summe der drey Neigungs-Winkel größer seyn, als 180 Grade.

§. 12. Die Seiten eines Kugel-Dreyeckes können spitzig unter 90 Graden, oder stumpf über 90 Grade groß seyn.

§. 13. Auch der Neigungs-Winkel zweyer Flächen kann spitzig oder stumpf seyn. Ist der Neigungs-Winkel ein rechter Winkel, so stehen die zwey Seiten, die ihn einschließen, senkrecht auf einander, und man nennt dieses Kugel-Dreyeck ein rechtwinklichtes. Ist keiner der Neigungs-Winkel ein rechter, so nennt man selbes ein schief winklichtes Dreyeck.

Von den rechtwinklichten sphärischen Dreyecken.

§. 14. Wenn einer der drey Neigungs-Winkel ein rechter ist, so nennt man die ihm gegenüberliegende Seite die Hypothenuse, die zwey Seiten, welche den

rechten Winkel einschließen, Catheten. Steht Fig. 2. die Seite DCB senkrecht auf der Seite BCD, so sind diese beyden Seiten die Catheten, die Seite DCA ist die Hypothenuse.

§. 15. Steht die Seite DCB senkrecht auf der Seite BCD, so muß, wenn DC der Sinus dieser Seite ist, der Punkt senkrecht ober E stehen, und da bey der Zusammenlegung der Punkt A mit dem Punkte D zusammenfällt, so ist auch A senkrecht ober E. Ist also AF der Sinus der Seite ACD, so wird das Verhältniß des Sinus AF zu dem auf der Fläche BCD in E senkrechten DE den Sinus des Neigungs-Winkels bestimmen.

Note. Der Bequemlichkeit wegen wird man die Seiten-Flächen durch die Buchstaben A, B, D, und die Neigungs-Winkel, welche jeder dieser Seite gegenüber liegen, durch α, β. $\triangle$ bezeichnen. In den Figuren 3 und 4 wird angenommen, daß die Fläche A auf der Fläche B senkrecht sey, es ist also die Fläche D die Hypothenuse, und der Winkel $\triangle$ ein rechter Winkel.

§. 16. Es ist also $AF = GE. \text{Sin } \alpha$, oder $\text{Sin } A = \text{Sin } D. \text{Sin } \alpha$; und so auch Fig. 4. $DM = EK \text{ Sin } \beta$, oder $\text{Sin } B = \text{Sin } D \text{ Sin } \beta$. Man hat also folgende Proportionen

CA oder der Radius $1 : \text{Sin } D = \text{Sin } \alpha : \text{Sin } A$.

und $1 : \text{Sin } D = \text{Sin } \beta : \text{Sin } B$.

Das ist: der Radius verhält sich zum Sinus der Hypothenuse, wie der Sinus eines Neigungs-Winkels zum Sinus der demselben gegenüber liegenden Cathete.

Note. Es ist leicht, den Neigungs-Winkel zu construiren. Man beschreibe mit der Linie AF aus dem Punkte F einen Bogen. Man ziehe FG und errichte FH senkrecht auf dem Punkte F; so ist FH = AF, somit GH = GE, und der Winkel FGH = α, denn es ist: $\text{Sin FGH} = \frac{FH}{GH} = \frac{\text{Sin A}}{\text{Sin D}}$. Eben so findet man Fig. 4. den Winkel β.

§. 17. Es ist Fig. 3. CB: CS = CF: CG, oder 1: Cos B = Cos A: Cos D. Das ist: der Radius ist zum Cosinus einer Cathete, wie der Cosinus der anderen Cathete zum Cosinus der Hypothenuse.

§. 18. Man ziehe QD, QC Fig. 3. die Tangente und Secante der Seite BCD, so sind die Dreyecke QCD, FCG einander ähnlich, und folglich, da FG = GH Cos FGH = Sin D Cos α. ist,

CD: QD = CG: FG, oder

1: Tang B = Cos D: Sin D Cos α = Cot D: Cos α.

Eben so findet man Fig. 4.

1: Tang A: Cos D: Sin D Cos β = Cot D: Cos β.

Versetzt man die mittleren Glieder, so ist

1: Cot D = Tang B: Cos α = Tang A: Cos β, das ist, der Radius ist zur Cotangente der Hypothenuse, wie die Tangente einer Cathete zum Cosinus des anliegenden Winkels.

§. 19. Es ist Fig. 3. CF = Cos A, also FG = Cos A Sin B = GH. Cos FGH = Sin D. Cos α. Es ist aber $\text{Sin D} = \frac{\text{Sin B}}{\text{Sin } \beta}$, also ist: Cos α = Cos A Sin β.

Eben so findet man aus Fig. 4. $\text{Cos}\,\beta = \text{Cos B. Sin}\,\alpha$.
Also ist $1 : \text{Cos A} = \text{Sin B} : \text{Cos}\,\alpha$ und
$1 : \text{Cos B} = \text{Sin}\,\alpha : \text{Cos}\,\beta$, das ist, der Radius verhält sich zum Cosinus einer Cathete, wie der Sinus des ihr anliegenden Winkels zum Cosinus des gegenüberliegenden.

§. 20. Da nach §. 17. $\frac{\text{Cos D}}{\text{Cos A}} = \text{Cos B}$ ist, so substituire man in dem zweyten Verhältnisse, und multiplicire die Glieder mit denen des ersten, so wird:
$1 : \text{Cos D} = \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta : \text{Sin}\,\beta.\ \text{Cos}\,\alpha = \text{Tang}\,\alpha : \text{Cot}\,\beta$, das ist: der Radius ist zum Cosinus der Hypothenuse, wie die Tangente des einen anliegenden Winkels zur Cotangente des anderen.

Note. Es ist auch durch Zusammensetzung:
$1 + \text{Cos D} : 1 - \text{Cos D} = \text{Cos}\,\overline{\alpha - \beta} : \text{Cos}\,\overline{\alpha + \beta}$; also

$$1 : \text{Tang}\,\frac{D}{2} = \sqrt{\text{Cos}\,\overline{\alpha - \beta}} : \sqrt{\text{Cos}\,\overline{\alpha + \beta}}.$$

§. 21. Nach Fig. 3 ist:
$\text{CG} : \text{FG} = 1 : \text{Tang B}$ und $\text{FG} : \text{FH} = 1 : \text{Tang}\,\alpha$.
Also ist: $\text{CG} : \text{FH} = \text{Tang B} : \text{Tang}\,\alpha$.
Da nun $\text{CG} = \text{Cos D} = \text{Cos A Cos B}$. §. 17 ist, $\text{FH} = \text{Sin A}$ ist, so substituire man diese Werthe, und man findet: $1 : \text{Sin B} = \text{Tang}\,\alpha : \text{Tang A} = \text{Cot A} : \text{Cot}\,\alpha$.
Eben so findet man aus Fig. 4.
$1 : \text{Sin A} = \text{Tang}\,\beta : \text{Tang B} = \text{Cot B} : \text{Cot}\,\beta$, das ist: der Radius ist zum Sinus einer Cathete, wie die Cotangente der anderen Cathete zur Cotangente des ihr gegenüberliegenden Winkels.

Note. Diese Verhältnisse unterliegen keiner Zweydeutigkeit.

Von

Von den schiefwinklichten sphärischen Dreyecken.

§. 22. Man entwerfe zwey Kugeldreyecke, die einen rechten Winkel und eine gleiche Cathete haben. In Fig. 5 und 6 seyen ECD und JCK die gleiche Cathete. Sie seyen senkrecht auf den anderen Catheten BCD und KCL. Man stosse diese zwey Dreyecke zusammen, so entstehet ein schiefwinklichtes Dreyeck, in dem die Hypothenusen ACB und CLM die Seiten-Flächen, die Catheten BCD und KCL zusammen die Basis sind. ECD = JCK wird die Vertikal-Höhe des Dreyeckes seyn.

§. 23. Die Fig. 7. stellt das neu entstandene schiefwinklichte Dreyeck vor. Die Seite ACB sey A, MCL = B, BCL = BCD + DCL = D. Es seyen α, β, Δ die jeder Seite gegenüberliegenden Winkel.

§. 24. Die auf CK senkrechte Fläche ECD Fig. 5. theilt die Basis D und den ihr gegenüberliegenden Winkel in zwey Theile. Man nenne M das Segment BCD. Es sey DCL = R. Der Theil des Winkels Δ der dem Segmente M gegenüberliegt, sey μ; und der andere, welcher dem Segmente R gegenüber liegt, sey ρ. T nenne man die Vertikal-Fläche, welche die Basis D und den Winkel Δ theilt.

§. 25. GH = GP ist der Sinus der Vertikal-Fläche, und es ist somit

$$GH = AF \text{ Sin } HFG = \text{Sin } A \text{ Sin } \beta = MN \text{ Sin } PNG = \text{Sin } B \text{ Sin } \alpha,$$

also

$$\text{Sin } A \text{ Sin } \beta = \text{Sin } B \text{ Sin } \alpha.$$

Man mache B zur Basis, so wird eine andere Vertikal-

Fläche

Fläche die Höhe des Dreyeckes bestimmen. Ihr Sinus sey $= \sin x$, so wird

$\sin x = \sin D \sin \alpha$ und $\sin x = \sin A \sin \Delta$. Also

$$\sin D \sin \alpha = \sin A \sin \Delta.$$

Folglich überhaupt $\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin D}{\sin \Delta}$

das ist, die Sinus der Seiten verhalten sich wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

§. 26. Es ist also auch durch Zusammensetzung:

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B = \sin \alpha + \sin \beta : \sin \alpha - \sin \beta,$$

und $(\sin A \pm \sin B) \sin \Delta = (\sin \alpha \pm \sin \beta) \sin D.$

§. 27. Nach Fig. 7. ist $CN = \cos B = CG \cos R$; $CF = \cos A = CG \cos M$, also

$$\cos M : \cos R = \cos A : \cos B,$$

das ist, die Cosinus der Segmente der Basis verhalten sich wie die Cosinus der anliegenden Seiten.

§. 28. Es ist also durch Zusammensetzung

$$\cos M + \cos R : \cos M - \cos R = \cos A + \cos B : \cos A - \cos B$$

oder $\cot \frac{M+R}{2} : \tan \frac{M-R}{2} = \cot \frac{A+B}{2} : \tan \frac{A-B}{2}$

also da

$\frac{M+R}{2} = \frac{D}{2}$: ist $\tan \frac{M-R}{2} = \cot \frac{D}{2} \cdot \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\cot \frac{A+B}{2}}$

Sind also die drey Seiten eines Kugeldreyeckes gegeben, so kennt man die Differenz der Segmente der Basis.

§. 29.

§. 29. Nach Fig. 7 ist $FG = CG \sin M$; $GN = CG \sin R$, ferner ist $FG = GH \operatorname{Cot} \beta$; $GN = GP \operatorname{Cot} \alpha$, und $GH = GP$, also ist:

$$\sin M : \sin R = \operatorname{Cot} \beta : \operatorname{Cot} \alpha,$$

das ist, die Sinus der Segmente verhalten sich wie die Cotangenten der denselben anliegenden Winkel.

§. 30. Durch Zusammensetzung wird

$$\sin M + \sin R : \sin M - \sin R = \operatorname{Cot} \beta + \operatorname{Cot} \alpha : \operatorname{Cot} \beta - \operatorname{Cot} \alpha;$$

oder:

$$\operatorname{Tang} \frac{M+R}{2} : \operatorname{Tang} \frac{M-R}{2} = \sin \alpha + \beta : \sin \alpha - \beta$$

$$\text{also} \quad \operatorname{Tang} \frac{M-R}{2} = \operatorname{Tang} \frac{D}{2} \cdot \frac{\sin \alpha - \beta}{\sin \alpha + \beta}.$$

Wenn also eine Seite D, und die ihr anliegenden Winkel α und β gegeben sind, so findet man die Differenz der Segmente.

§. 31. Es ist also nach §. 28 und 30

$$\operatorname{Tang} \frac{M-R}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B.) \sin \alpha - \beta}{\operatorname{Cot} \frac{1}{2}(A+B.) \sin \alpha + \beta}}.$$

$$\operatorname{Tang} \frac{D}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Tang} \frac{1}{2}(A-B.) \sin \alpha + \beta}{\operatorname{Cot} \frac{1}{2}(A+B.) \sin \alpha - \beta}}.$$

Sind also zwey Seiten A und B und ein gegenüberliegender Winkel α, oder zwey Winkel α und β und eine gegenüberliegende Seite A gegeben, so suche man β oder B aus §. 25, und man findet dann aus obigen zwey Gleichungen die dritte Seite und die Differenz ihrer Segmente.

§. 32.

§. 32. In dem rechtwinklichten Dreyecke, das durch die Seite A das Segment M und die Vertikal-Fläche T gebildet wird, ist

$$\text{Sin } M = \text{Sin } A \text{ Sin } \mu. \text{ §. 16;}$$

in dem anderen ist $\text{Sin } R = \text{Sin } B \text{ Sin } \rho$.

Nun ist $\text{Sin } A = \frac{\text{Sin } B \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta}$ §. 25, und

$$\text{Sin } M : \text{Sin } R = \text{Cot } \beta : \text{Cot } \alpha,$$

also ist: $\text{Sin } \mu : \text{Sin } \rho = \text{Cos } \beta : \text{Cos } \alpha$,
das ist: die Sinus der Vertikal-Winkel verhalten sich wie die Cosinus der anliegenden Winkel.

§. 33. Durch Zusammensetzung findet man:
$\text{Sin } \mu + \text{Sin } \rho : \text{Sin } \mu - \text{Sin } \rho = \text{Cos } \alpha + \text{Cos } \beta : \text{Cos } \alpha - \text{Cos } \beta$,
oder:

$$\text{Tang } \frac{\mu + \rho}{2} : \text{Tang } \frac{\mu - \rho}{2} = \text{Cot } \frac{\alpha + \beta}{2} : \text{Tang } \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Da also $\frac{\mu + \rho}{2} = \frac{\Delta}{2}$ ist, so ist:

$$\text{Tang } \frac{\mu - \rho}{2} = \text{Tang } \frac{\Delta}{2} . \frac{\text{Tang } \frac{\alpha - \beta}{2}}{\text{Cot } \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Sind also die drey Winkel eines Kugeldreyeckes gegeben, so gibt diese Formel die Differenz der Vertikal-Winkel.

§. 34. In den rechtwinklichten Dreyecken, welche durch die gemeinschaftliche Vertikal-Fläche T gebildet werden, findet man nach §. 18.

$$1 : \text{Cot } A = \text{Tang } T : \text{Cos } \mu.$$

$$1 : \text{Cot } B = \text{Tang } T : \text{Cos } \rho,$$

also:

also: $\text{Cos}\,\mu : \text{Cos}\,\rho = \text{Cot A} : \text{Cot B}$,
das ist: die Cosinus der Vertikal-Winkel verhalten sich wie die Cotangenten der anliegenden Seiten.

§. 35. Durch Zusammensetzung wird:

$$\text{Cos}\,\mu + \text{Cos}\,\rho : \text{Cos}\,\mu - \text{Cos}\,\rho = \text{Cot A} + \text{Cot B} : \text{Cot A} - \text{Cot B}.$$

oder $\text{Cot}\,\frac{\mu+\rho}{2} : \text{Tang}\,\frac{\mu-\rho}{2} = \text{Sin}\,A+B : \text{Sin}\,A-B$,

also:

$$\text{Tang}\,\frac{\mu-\rho}{2} = \text{Cot}\,\frac{\mu+\rho}{2} \cdot \frac{\text{Sin}\,A-B}{\text{Sin}\,A+B} = \text{Cot}\,\frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\text{Sin}\,A-B}{\text{Sin}\,A+B}.$$

Sind also zwey Seiten A und B und der eingeschlossene Winkel Δ gegeben, so findet man die Differenz der Vertikal-Winkel.

§. 36. Nach §. 33 und 35 ist demnach:

$$\text{Tang}\,\frac{\mu-\rho}{2} = \sqrt{\frac{\text{Tang}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta.)\ \text{Sin}\,A-B}{\text{Cot}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta.)\ \text{Sin}\,A+B}}$$

$$\text{Tang}\,\frac{\Delta}{2} = \sqrt{\frac{\text{Tang}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta.)\ \text{Sin}\,A+B}{\text{Cot}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta.)\ \text{Sin}\,A-B.}}$$

Note. Es ist also:

$$\text{Tang}\,\frac{M-R}{2} : \text{Tang}\,\frac{\mu-\rho}{2} = \frac{\text{Sin}\,\frac{A-B}{2}}{\text{Cos}\,\frac{A+B}{2}} : \frac{\text{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

§. 37.

§. 37. Es lassen sich auf diese Art noch viele andere Formeln finden. Nach §. 27 und 29 ist auch:

$$\frac{\text{Sin}\,M + \text{Sin}\,R}{\text{Cos}\,M + \text{Cos}\,R} : \frac{\text{Sin}\,R}{\text{Cos}\,R} = \frac{\text{Cot}\,\beta + \text{Cot}\,\alpha}{\text{Cos}\,A + \text{Cos}\,B} : \frac{\text{Cot}\,\alpha}{\text{Cos}\,B}.$$

Nun ist $\frac{\text{Sin}\,M + \text{Sin}\,R}{\text{Cos}\,M + \text{Cos}\,R} = \text{Tang}\,\frac{M + R}{2} =$ $\text{Tang}\,\frac{D}{2}$; $\text{Tang}\,R = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Tang}\,B$. §. 18.

$\text{Cot}\,\alpha + \text{Cot}\,\beta = \frac{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}{\text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta}$ und $\text{Cos}\,A + \text{Cos}\,B =$

$$2\ \text{Cos}\,\frac{A + B}{2}.\ \text{Cos}\,\frac{A - B}{2}.$$

Man substituire und reducire, so findet man:

$$\text{Tang}\,\frac{M + R}{2} = \text{Tang}\,\frac{D}{2} = \frac{\text{Sin}\,B.\ \text{Sin}\,(\alpha + \beta)}{\text{Sin}\,\beta.\ 2\,\text{Cos}\,\frac{A + B}{2}.\ \text{Cos}\,\frac{A - B}{2}.}$$

Verfährt man auf dieselbe Art mit den Verhältnissen §. 32 und 34, so findet man:

$$\text{Tang}\,\frac{\mu + \rho}{2} = \text{Tang}\,\frac{\Delta}{2} = \frac{\text{Sin}\,B.}{\text{Sin}\,\beta}\ \frac{2\,\text{Cos}\,\frac{\alpha - \beta}{2}.\ \text{Cos}\,\frac{\alpha + \beta}{2}}{\text{Sin}\,(A + B)}$$

§. 38. Nach §. 26 ist:

$$\text{Tang}\,\frac{A + B}{2} : \text{Tang}\,\frac{A - B}{2} = \text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta : \text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}\,\beta.$$

Nach §. 31. ist:

$$\text{Tang}\,\frac{A + B}{2} = \text{Tang}^2\,\frac{D}{2}.\ \text{Cot}\,\frac{A - B}{2}.\ \frac{\text{Sin}\,(\alpha - \beta).}{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}$$

Man substituire, so wird

$$\text{Tang}^2\,\frac{D}{2} : \text{Tang}^2\,\frac{A - B}{2} = \frac{\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,(\alpha - \beta)} : \frac{\text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,(\alpha + \beta).}$$

Nun

Nun ist $\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta = 2\,\text{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \text{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\text{Sin}\,\alpha+\beta = 2\,\text{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \text{Cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}\,\beta = 2\,\text{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \text{Cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}$,

und $\text{Sin}\,\alpha-\beta = 2\,\text{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \text{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Also ist: $\text{Tang}\,\frac{A-B}{2} = \text{Tang}\,\frac{D}{2} \cdot \frac{\text{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Entwickelt man aus der Formel §. 31 den Werth von $\text{Tang}\,\frac{A-B}{2}$, und substituirt, so wird

$$\text{Tang}\,\frac{A+B}{2} = \text{Tang}\,\frac{D}{2} \cdot \frac{\text{Cos}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{Cos}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Sind also zwey Winkel α und β und die dazwischen liegende Seite gegeben, so findet man die Summe und die Differenz der beyden übrigen Seiten.

§. 39. Gerade wie man mit den Seiten operirt hat, operire man mit den Winkeln. Man hat nämlich: $\text{Tang}\,\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{Tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B : \text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B$.

Aus der Gleichung für $\text{Tang}\,\frac{\Delta}{2}$ §. 36 entwickele man $\text{Tang}\,\frac{\alpha+\beta}{2}$, und substituire, so hat man:

$$\text{Cot}^2\frac{\Delta}{2} : \text{Tang}^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\text{Sin}\,A + \text{Sin}\,B}{\text{Sin}\,A - B} : \frac{\text{Sin}\,A - \text{Sin}\,B}{\text{Sin}\,A + B}.$$

Ver-

Verfährt man wie zuvor, so wird:

$$\text{Tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \text{Cot}\,\frac{\Delta}{2}.\,\frac{\text{Sin}\,\frac{A-B}{2}}{\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}}.$$

Entwickelt man Tang $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und substituirt, so wird

$$\text{Tang}\,\frac{\alpha+\beta}{2} = \text{Cot}\,\frac{\Delta}{2}.\,\frac{\text{Cos}\,\frac{A-B}{2}}{\text{Cos}\,\frac{A+B}{2}}.$$

Wenn also ein Winkel, und die denselben einschließenden Seiten A und B gegeben sind, so findet man die Summe und die Differenz der beyden übrigen Winkel.

Note. Auf diesem Wege fand der Verfasser die Nepperischen Formeln, die er vorher nicht kannte, und wähnte somit der erste Erfinder derselben gewesen zu seyn,

§ 40. Man ziehe Fig. 8. GP senkrecht auf CL, RQ senkrecht auf GP, so ist der Winkel QGR = BCL = D; und es ist CP = CG Cos D = Cos A Cos D, folglich PF = RQ = Cos B — Cos A Cos D. Nun ist GR = QR. Cosec QGR $= \frac{\text{Cos B} - \text{Cos A Cos D}}{\text{Sin D}}$.

Es ist aber auch GR = GH Cos β = Sin A Cos β,

also ist: I. $\text{Cos}\,\beta = \frac{\text{Cos B} - \text{Cos A Cos D}}{\text{Sin A Sin D}}.$

II. $\text{Cos}\,\alpha = \frac{\text{Cos A} - \text{Cos B Cos D}}{\text{Sin B Sin D}}$

III.

$$\text{III. } \cos \Delta = \frac{\cos D - \cos A \cos B}{\sin A \sin B.}$$

Die Formeln geben die Winkel, wenn die Seiten gegeben sind; sie sind aber für den Gebrauch der Logarithmen unbequem, daher verwandlet man sie in andere auf folgende Art.

§. 41. Nach obigen ist in Nro. II.

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\sin B \sin D + \cos B \cos D - \cos A}{2. \sin B \sin D} =$$

$$\frac{\cos (B - D) - \cos A.}{2 \sin B \sin D.}$$

$$\text{Also } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{A + (B - D)}{2}. \sin \frac{A - (B - D)}{2}}{\sin B \sin D}}$$

Eben so findet man:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{\cos \frac{B + D + A.}{2} \cos \frac{B + D - A}{2}}{\sin B \sin D.}}$$

§. 42. Es seyen Fig. 9. alle Seiten und Winkel wie zuvor Fig. 8. Man verlängere HM, bis sie CD in K schneidet; so ist $KH = \frac{FH}{\sin D} = \frac{\sin A \cos \beta.}{\sin D}$

Vom Punkte K ziehe man KJ senkrecht auf CE, so ist JG = KH. Es ist aber CJ = KJ Cot KCJ = GH

$GH \text{ Cot } D = \frac{\text{Sin } B \text{ Cos } \alpha \text{ Cos } D}{\text{Sin } D}$; somit $CG = CJ + JG = CJ + KH = \text{Cos } B = \frac{\text{Sin } A \text{ Cos } \beta + \text{Sin } B \text{ Cos } \alpha \text{ Cos } D}{\text{Sin } D.}$

Nun ist nach §. 25 $\frac{\text{Sin } A}{\text{Sin } D} = \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \Delta}$, und $\frac{\text{Sin } B}{\text{Sin } D} = \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Sin } \Delta}$. Man substituire, so ist:

$$\text{Cos } B = \frac{\text{Sin } \alpha \text{ Cos } \beta + \text{Sin } \beta \text{ Cos } \alpha \text{ Cos } D}{\text{Sin } \Delta.}$$

Man nehme die Seite B zur Basis, und verfahre auf dieselbe Art, um Cos D zu finden, und man hat:

$$\text{Cos } D = \frac{\text{Sin } \alpha \text{ Cos } \Delta + \text{Sin } \Delta \text{ Cos } \alpha \text{ Cos } B}{\text{Sin } \beta.}$$

Aus beyden Gleichungen eliminire man Cos B, so findet man

$$\text{I. Cos } D = \frac{\text{Cos } \Delta + \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \beta}{\text{Sin } \alpha \text{ Sin } \beta.}$$

Eliminirt man Cos D, so ist

$$\text{II. Cos } B = \frac{\text{Cos } \beta + \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \Delta}{\text{Sin } \alpha \text{ Sin } \Delta}$$

Eben so findet man:

$$\text{III. Cos } A = \frac{\text{Cos } \alpha + \text{Cos } \beta \text{ Cos } \Delta}{\text{Sin } \beta \text{ Sin } \Delta;}$$

Man

Man kann also, wenn diese drey Winkel gegeben sind, die Seiten aus diesen Formeln finden.

§. 43. Aus Nro. III. §. 42. folgt:

$$\frac{1 - \text{Cos } A}{2} = \frac{\text{Cos } A - (\text{Cos }\beta \text{ Cos }\Delta - \text{Sin }\beta \text{ Sin }\Delta)}{2 \text{ Sin } \beta \text{ Sin } \Delta} = \frac{- \text{Cos } \alpha - \text{Cos } \overline{\beta + \Delta}}{2 \text{ Sin } \beta \text{ Sin } \Delta.}$$

Also:

$$\text{Sin } \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{- \text{Cos } \frac{\alpha + \beta + \Delta}{2} . \text{ Cos } \frac{\alpha + \beta - \Delta}{2}}{2 \text{ Sin } \beta \text{ Sin } \Delta.}}$$

Note. La Grange und andere bemühen sich, zu erklären, warum die unter das Wurzelzeichen fallende negative Größe dennoch einer positiven Größe gleich sey. Ihre Erklärung ist ganz unverständlich; die wahre Ursache ist leicht zu finden. Da die drey Neigungs-Winkel eines Kugeldreyeckes größer als 180 Grade seyn müssen, so ist $\frac{\alpha + \beta + \Delta}{2}$ größer, als 90 Grade, folglich Cos $\frac{\alpha + \beta + \Delta}{2}$ negativ. Eine negative Größe negativ genommen, ist aber positiv.

§. 44. Diese Formeln sind keiner Zweydeutigkeit unterworfen, als der, welche ebenfalls bey der gradlinigten Trigonometrie Statt hat. Wenn nämlich

zwey

zwey Seiten und ein überliegender Winkel gegeben ist. Wenn $\sin \alpha = \frac{\sin A \sin \beta}{\sin B}$ ist, so kann α spitzig oder stumpf ſeyn. Sonst hebet die Zeichung des Dreyeckes alle möglichen Zweydeutigkeiten auf.

Von

Von den

Kegelschnitten.

Einleitung

Der Verfasser schmeichelt sich, daß er durch Mittheilung dieser neuen Methode die Kegelschnitte zu behandlen, den Liebhabern der Mathematik kein unwillkommenes Geschenk mache. Was sie mir leiste, wissen alle die, welche ich über den Werth dieser Arbeit zu Rathe gezogen habe. Sie bewunderten sämmtlich die Leichtigkeit, mit der ich aus dem Stegreife die verwikeltesten Gleichungen coordinirter Größen bestimmte. Allein man war geneigter, mich für ein Wunder des Gedächtnisses zu halten, als meiner Methode Gerechtigkeit widerfahren zu lassen. Ein Geometer schrieb dem Verfasser wörtlich folgendes: „Ihre Methode ist neu „und sinnreich; es können durch selbe sehr viele schwere „Probleme aufgelöset werden. Aber sie leistet nicht, „was sie mir versprachen. Sie ist nicht leicht, und es „gehört ganz gewiß ein ungeheueres Gedächtniß, wie „das ihrige dazu, um wie sie die Formeln ohne An„stoße herbeten zu können. Ich bin doch auch keiner „der Ungeschicktesten, und habe ihre Kegelschnitte zwey„mal mit vieler Aufmerksamkeit gelesen, aber ich wäre „nicht im Stande, ihnen in diesem Augenblicke die „Gleichung der Tangente der Ellipse niederzuschreiben.

So schwer wäre nun das eben nicht gewesen, denn $G\frac{Cos.A}{Sin A}$ ist wirklich keine schwer zu merkende Gleichung. Auf zweymal lesen kann man sich keine fünf Zeilen aus einem Gebetbuche merken, geschweige so viele mathematische Formeln. Allein, wer nach meiner Methode die Kegelschnitte studiret, findet die vergessenen Formeln auch nach 20 Jahren alsogleich wieder, ohne ein Buch nachschlagen zu dürfen, wo hingegen nach der gewöhnlichen ein Professor selbst, der nur drey Monate davon ist, sein Buch wieder zu Handen nehmen muß. Und dann sind die von mir gegebenen Formeln so leicht, daß sie ungemein bequem sind, wenn man durch selbe neue Verhältnisse suchen will, und geben dann wieder für die gesuchten Größen leichte, und für den Gebrauch der Logarithmen bequeme Formeln.

Ein anderer Censor fand die Figuren zu sehr mit Linien überladen, dadurch meint er, würde das Auge irre geführet, und finde sich nur mit der äußersten Anstrengung in diesem Labyrinthe zu recht. Allein, da die Absicht bey Zeichnung dieser Figuren dahin ging, die Verbindung der coordinirten Größen zu zeigen, so müssen sie nothwendig sehr complicirt erscheinen. Doch diese Verwirrung wird aufhören, wenn man sich die Curve, die man studiret, nach der gegebenen Anleitung zeichnet, und dann in diese reine Figur nach und nach jene Linien zieht, die man zu ziehen angewiesen wird. Man zeichne die Figuren nach einem großen Maßstabe mit aller nur möglichen Genauigkeit auf ein ausgespanntes Papier, und ziehe die Linien sehr fein. Häufen sich

dennoch die Linien zu sehr, so zeichne man eine zweyte Figur.

Wünscht man Gewandtheit zu erlangen, so suche man die angegebenen Verhältnisse im Buche oder in den Tafeln 6. 7. 8 nach, werfe dann das Buch weg, und suche den Beweis ohne Anleitung. Zu diesem Endzwecke hat man die Tafeln 4, 5, 6 diesem Werke beygefügt. Am Rande findet man die Gleichungen der meisten zum generirenden Winkel coordinirten Größen; und man wird daraus ersehen, daß zwar viel zu merken sey, daß aber, was zu merken ist, sehr leicht zu memoriren sey.

Die Beweise aller zu erweisenden Sätze sind kinderleicht, wenn man sie gegen die klafterlangen und verwickelten Demonstrationen unserer Lehrbücher hält; aber freylich wird von dem Leser gefordert, daß ihm die geradlinigte Trigonometrie geläufig sey.

Schon geübten Geometern empfehle ich den Abschnitt von der Hyperbel zur genauen Prüfung. Der letzte Artikel stehet in genauer Verbindung mit der ganzen Geometrie. Ueberhaupt ist die Hyperbel bis daher sehr oberflächlich behandelt worden. Man hat noch nicht bemerket, daß vier coordinirte Hyperbeln seyen, und doch ist diese Coordination offenbar. Man wird, wie ich hoffe, finden, daß in der Geometrie endlicher Größen noch so viele unentdeckte Länder seyen, daß wir eben nicht Noth haben, uns in den Spatiis immaginariis des Unendlichen zu verlieren, um Beschäftigung zu finden.

Allge-

Allgemeine Vorbegriffe
von den
Kegelschnitten.

§. 1. Wird ein Kegel dadurch beschrieben, daß sich ein rechtwinklichtes Dreyeck ABD um die Cathete AD, Fig. 1. drehet, so muß jede mit BD parallele Linie PH einen Kreis beschreiben. Wird also ein Kegel so geschnitten, daß der Schnitt auf der Axe AD rechtwinklicht stehe, so ist der Schnitt ein Kreis.

§. 2. PH = HQ wird unter dieser Voraussetzung der Radius eines Kreises; PK, QK Abscissen des Durchmessers PQ seyn. Man denke sich die zu den Abscissen PK, QK gehörige Ordinate senkrecht auf der Papier-Fläche im Punkte K, so wird $\sqrt{PK, KQ}$ ihre Gleichung seyn.

§. 3. Es sey ES eine Fläche, welche den Kegel so schneidet, daß sie zugleich durch die Ordinate, welche auf K senkrecht stehet, gehe; so wird diese Ordinate, welche wir y nennen wollen, die Durchschnitts-Linie beyder Flächen, und eine gemeinschaftliche Ordinate derselben seyn. Läßt sich also das Verhältniß dieser Ordinate zu den Abscissen EK und KS der anderen Fläche bestimmen, so hat man eine allgemeine Gleichung für alle Kegelschnitte.

§. 4.

§. 4. Es sey $AG = f$, $EG = g$, $EK = x$, die auf K senkrechte gemeinschaftliche Ordinate $= y$, der Winkel EKL, unter dem sich beyde Flächen schneiden, sey A, so ist:

$EL = x \operatorname{Sin} A$; $LK = x \operatorname{Cos} A$; $AH = f + x \operatorname{Sin} A$.

Nun ist:

$AG : GE = AH : AP$, also ist $PH = \frac{g.(f + x \operatorname{Sin} A)}{f}$.

Ferner ist:

$AG : GE = EL : PL$, also ist $PL = \frac{g.}{f} x \operatorname{Sin} A$, somit ist:

$$PK = PL + LK = \frac{g.}{f} x \operatorname{Sin} A + x \operatorname{Cos} A.$$

Da nun $HQ = PH$ ist, so ist $KQ = PQ - PK = 2PH - LK - PL = \frac{2g.}{f}(f + x \operatorname{Sin} A) - \frac{g.}{f} x \operatorname{Sin} A - x \operatorname{Cos} A$.

Es ist aber die Ordinate des Kreises, dessen PH der Radius ist, $= \sqrt{PK.KQ}$ (§.2.); also ist $y = \sqrt{PK.KQ} =$

$$\sqrt{\frac{g.(x \operatorname{Sin} A + f.x \operatorname{Cos} A)}{f.} . \frac{2gf + g x \operatorname{Sin} A - f x \operatorname{Cos} A}{f}}$$

oder:

$$y^2 = \frac{2gf.(f \operatorname{Cos} A + g \operatorname{Sin} A).x - (f^2 \operatorname{Cos}^2 A - g^2 \operatorname{Sin}^2 A).x^2}{f^2}$$

Diese ist die allgemeine Gleichung aller Kegelschnitte, und es ist aus selber offenbar, daß der Winkel A, unter welchem sich die Zirkel-Fläche und die andere Fläche schneiden, die Natur der krumen Linie bestimme, welche durch diesen Schnitt entstehet.

§. 5. Es sey dieser Winkel EKL $= 0$, so wird der Winkel LEK ein rechter, und ES mit PQ parallel,

der

der Schnitt ist also ein Kreis; und da unter dieser Voraussetzung $\text{Sin}\,A = 0$; $\text{Cos}\,A = 1$ ist, so verwandelt sich obige allgemeine Gleichung §. 4. in folgende:

$$y^2 = 2gx - x^2.$$

Ist $f\,\text{Cos}\,A$ größer, als $g\,\text{Sin}\,A$, so bleibt das 2te Glied der Gleichung immer unter dem Zeichen $-$, und die Curve ist dann eine Endliche Linie; denn wenn man x so groß nimmt, daß das zweyte Glied so groß wird als das erste, so wird $y^2 = 0$; dieses geschieht, wenn man $x = \frac{2gf}{f\,\text{Cos}\,A - g\,\text{Sin}\,A}$ setzet.

Allein y ist auch dann $= 0$, wenn man $x = 0$ setzet, also ist die Curve eine in sich zurückkehrende Linie, deren Ordinaten in den Punkten E und S $= 0$ werden. Ihre große Axe $= \frac{2gf}{f\,\text{Cos}\,A - g\,\text{Sin}\,A.}$ Die kleine Axe oder die Ordinate zu $x = \frac{ES}{2}$, ist aber

$$= 2g\,\frac{\sqrt{f\,\text{Cos}\,A + g\,\text{Sin}\,A}}{\sqrt{f\,\text{Cos}\,A - g\,\text{Sin}\,A}}$$

Man setze $f\,\text{Cos}\,A = g\,\text{Sin}\,A$, so muß das Dreyeck PEK dem Dreyecke EAF ähnlich, somit ES mit AC parallel seyn. Unter dieser Voraussetzung wird aber auch das zweyte Glied der Gleichung $= 0$, und sie verwandelt sich in folgende:

$$y^2 = 4g\,\text{Cos}\,A.\,x = 4f\,\text{Sin}\,A.\,x.$$

In dieser Gleichung kann y nur dann null werden, wenn $x = 0$ ist, das ist, im Punkte E, und je größer x wird, desto größer wird auch y.

Man setze endlich, $g\,\text{Sin}\,A$ sey größer als $f\,\text{Cos}\,A$, so ändert sich das Zeichen vor dem zweyten Gliede aus, $-$ in $+$; und da nun beyde Glieder positiv sind, so kann

kann y nur dann $= 0$ seyn, wenn $x = 0$, das ist, im Punkte E; und je größer x, desto größer y. Ist z. B. $f \, Cos \, A = 0$, so verwandelt sich die obige Gleichung in folgende: $y^2 = \frac{g^2}{f^2} \cdot 2fx + x^2$

Damit aber $Cos \, A = 0$ sey, so muß der Winkel EKP ein rechter seyn, und der Schnitt in die Linie EL fallen, das ist, mit der Axe AD des Kegels parallel seyn.

§. 6. Da nun das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten dieser verschiedenen Curven durch die Coordinaten des Winkels A bestimmt worden sind; so sind auch alle durch die Coordinaten eines generirenden Winkels bestimmbar, wie alsobald gezeigt werden soll.

§. 7. Es sey Fig. 2. ein Stab DB durch den Punkt A in zwey gleiche Theile getheilt. Der Stab bewege sich zwischen den Schenkeln des rechten Winkels DCB. Man fragt, welche Linie der Punkt des Stabs DB brschreiben werde.

Es sey der Winkel ADH, den der Stab mit dem Schenkel DC macht, $= A$; so ist $AH = CJ = AD \, Sin \, A = x$ oder der Abscisse; und $AJ = DH = AD \, Cos \, A = AB \, Cos \, A = y$ oder der Ordinate. Nennt man $AD = AB$, a, so ist $x = a \, Sin \, A$; $y = a \, Cos \, A$, folglich: $y^2 = a^2 - x^2$
somit die Curve ein Kreis.

Ist $GE = a$, $EL = b$, so ist, wenn der Winkel EGK wie zuvor $= A$, und somit die Stäbe parallel sind, $EK = AH = CJ = a \, Sin \, A = x$ $EJ = EF \, Cos \, A = b \, Cos \, A = y$, somit:

y^2

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot a^2 - x^2;$$

somit die Curve eine Ellipse.

Diese Gleichungen werden auf Abscissen vom Vertex L gerechnet, leicht reduciret; denn setzt man $z = JL$, so ist $z = a\ (1 - \text{Cos}\ A)$;
somit im ersten Falle $AJ^2 = 2az - z^2$,
im 2ten Falle $EJ^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot 2az - z^2$.

Es kann also die Ellipse wie der Kreis durch die Coordinaten eines generirenden Winkels A ausgedrückt werden.

§. 8. Es sey Fig. 3. $AC = p$. Man ziehe die Tangente AB, und errichte die senkrechte BH; auch verlängere man sie, bis sie den verlängerten Radius AC in H schneidet. Nennt man A den Winkel ACB, so ist $AB = p\ \text{Tang}\ A$, $BH = p\ \text{Tang}^2 A$. Man mache die jedem Winkel coordinirte HB zur Abscisse, und AB zur rechtwinklichten Ordinate, wie in Fig. 4, so entstehet eine krumme Linie, eine Curve mit 2 Schenkeln, weil die Ordinate KB, auch negativ = KF genommen werden kann. Es ist demnach in dieser Curve die Abscisse oder $x = p\ \text{Tang}^2 A$ die Ordinate oder $y = p\ \text{Tang}\ A$, somit

$$y^2 = px;$$

diese Curve ist also eine Parabel.

§. 9. Man mache Fig. 3. $CB = p\ \text{Sec}\ A$ zur Abscisse, und $AB = p\ \text{Tang}\ A$ zur Ordinate, so ist $x = p\ \text{Sec}\ A$; $y = p\ \text{Tang}\ A$, somit

$$y^2 = x^2 \cdot p^2;$$

oder, wenn man $x = p\ \text{Sec}\ A - 1$ setzet:

$$y^2 = 2px + x^2.$$

Es

Es entstehet aus dieser Zusammensetzung die Curve Fig. 5, welche man Hyperbel nennt.

Beschreibt man Fig. 3. einen Kreis mit dem Radius CD = q, und setzt DE = q Tang A als Ordinate mit CB = p Sec A als Abscisse zusammen, so entstehet eine Varietät der Hyperbel, und ihre Gleichung ist:

$$y^2 = \frac{q^2}{p^2} \cdot x^2 - p^2,$$

oder, wenn man die Abscissen vom Vertex nimmt,

$$y^2 = \frac{q^2}{p^2} \cdot 2\,px + x^2.$$

Die Reduction der Kegelschnitte auf die Coordinaten eines generirenden Winkels erleichtert die Lehre der Kegelschnitte.

Von der Parabel.

§. 1. Wenn p eine unveränderliche Größe bedeutet, A einen veränderlichen Winkel, und ich nehme auf einer geraden Linie AP, Fig. 6. AH = p Tang ^{2}A, HE = p Tang A, so werden AH, HE desto größer, je größer der Winkel A ist. Sie werden beyde zugleich null, wenn der Winkel A null ist. Ist der Winkel A ein rechter Winkel, so werden beyde Coordinaten unendlich, weil die Tangente des Winkels von 90 Graden unendlich ist.

§. 2. Da man die Ordinate BK, Fig. 4. auch abwärts nach KF tragen kann, so gehören zu jeder Abscisse AK zwey Ordinaten, von denen man die eine positiv, die andere negativ nennt.

§. 3. Die auf diese Weise entstandene Linie nennt man eine Parabel; die unveränderliche Größe p nennt man den Parameter. Da nun $AK = x = p\,Tang^2 A$, so ist $px = p^2 Tang^2 A = BK^2 = y^2$. Dieses drückt man durch folgenden Lehrsatz aus:

In der Parabel ist das Quadrat der Ordinate gleich dem Rektangel aus dem Parameter und der Abscisse.

Da aber hier nicht von Flächen, sondern von Linien die Rede ist, so sollte man sagen: die Ordinate ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der Abscisse und dem Parameter.

§. 4. Nimmt man AL, (Fig. 4.) $= \frac{p}{4}$, so wird $LC = \frac{p}{2}$, folglich $CG = p$. Hieraus ist der generirende Winkel, dessen Coordinate der Parameter ist, leicht zu bestimmen.

§. 5. Man ziehe die Sehne AC, Fig. 6. so ist im Dreyecke ABC, die Ord. BC: Abscisse $AB = p\,Tang\,A : p\,Tang^2 A = 1 : Tang\,A$.

Es ist demnach der Winkel, den die Ordinate mit der Chorde macht, dem generirenden Winkel gleich.

§. 6. Es ist $AB^2 + BC^2 = AC^2$, folglich $AC = \sqrt{p^2 Tang^4 A + p^2 Tang^2 A} = p\,Sec\,A.\,Tang\,A$.

§. 7. Man ziehe EO so, daß sie AC und CB halbire, so ist EO parallel mit AB und senkrecht auf CB. Vom Punkte E, wo EO die Parabel schneidet, ziehe man die Perpendikular-Linie EH; so ist $EH = \frac{CB}{2}$

somit

somit $AH = \frac{AB}{4}$; da nun $FX = \frac{AB}{2}$, so ist $EF = AH = \frac{AB}{4} = \frac{p\,Tang^2 A}{4}$. Da nun $AF = \frac{p\,Sec\,A\,Tang\,A}{2}$ ist, §. 6. so ist $AF^2 = p\,Sec\,A^2 . EF = CF^2$.

§. 7. Man ziehe ML parallel mit AC in der Entfernung $AN = FD = z$, NL nenne man u; so ist $LP = u\,Cos\,A$, $NP = u\,Sin\,A$; und man hat LP^2 oder $u^2\,Cos^2 A = AP.p = p.(z + u\,Sin\,A)$ Es sey $w = u - DN = u - AF = u - \frac{p\,Sec\,A\,Tang\,A}{2}$, also $u = w + \frac{p\,Sec\,A\,Tang\,A}{2}$.

Man substituire in obiger Gleichung für u, so wird: $(w^2 + \frac{2pw\,Sec\,A\,Tang\,A}{2} + \frac{p^2\,Sec^2 A\,Tang^2 A}{4})\,Cos^2 A = p.(z + w + \frac{p\,Sec\,A\,Tang\,A}{2})\,Sin\,A$.

Man reducire, so ist: $w^2 = p\,Sec^2 A\,(z + \frac{p\,Tang^2 A}{4}) = p\,Sec^2 A\,(FD + FE)$.

Note. 1. Es hat also w zwey gleiche Werthe, und somit muß $DM = DL$ seyn. Es halbiret also die Linie EO alle mit AC parallelen Linien. Eine Linie, welche alle in der Parabel parallel gezogenen Linien halbiret, nennt man einen Diameter.

Note 2. Betrachtet man diese Parallelen als Ordinaten, und den Theil des Diameters, welcher zwischen der Parabel und der Ordinate fällt, als Abscissen, so

so ist die Ordinate die mittlere Proportional-Größe zwischen der Abscisse und der Größe $p \, Sec^2 A$. Man nennt diese Größe den zu den Ordinaten gehörigen Parameter.

Note 3. Der generirende Winkel A ist das Complement des Winkels, unter dem die Ordinate die Axe durchschneidet, denn es ist $CAB = LNP = 90 - ACB = 90 - A$. Nennt man also M den Winkel $CAB = LNP$, so ist der Parameter der zu den Ordinaten $DL = DM$ gehöret, $\frac{p}{Sin^2 M}$, das ist: die zu Parallelen gehörigen Parameter verhalten sich wie umgekehrt das Quadrat der Sinus, unter denen die Ordinaten die Axe schneiden.

§. 8. Man setze in der Gleichung für w, §. 7. $z = 0$, so wird, $w = \frac{p \, Tang \, A \, Sec \, A}{2} = AF = FC$. Setzet man aber $z = - \frac{p \, Tang^2 A}{4} = EF$, so wird $w = 0$, somit ist die mit AF parallele Linie ES die Tangente zum Punkte E; und da $ES = AF$ ist, so ist auch die Tangente $= \frac{p \, Sec \, A \, Tang \, A}{2}$.

§. 9. Es ist ferner SH die Subtangente. Nun ist $AS = EF = AH = \frac{p \, Tang^2 A}{4}$, also ist $SH = \frac{p \, Tang^2 A}{2}$, das ist, die Subtangente ist gleich der doppelten Abscisse, und die Tangente zur Subtangente

wie

wie die Secante des generirenden Winkels zur Tangente desselben.

§. 10. Da die Tangente $ES = \frac{p \, Sec \, A \, Tang \, A}{2}$ ist, so ist auch $ES^2 = p Sec^2 A . \frac{p Tang^2 A}{4} = p Sec^2 A . AH$, das ist: die Tangente ist die mittlere Proportional-Linie zur Abscisse, und zum Parameter im Punkte E der Parabel.

§. 11. Man setze §. 7. $AN = z = \frac{p}{4}$, so wird $w = \frac{p \, Sec^2 A}{2}$, somit $LM = p \, Sec^2 A$. gleich dem Parameter zum Punkte E. Wenn also in der Parabel eine Linie die Axe in der Entfernung $\frac{p}{4}$ vom Vertex schneidet, so ist diese Linie der Parameter zu allen mit ihr parallelen Ordinaten.

§. 12 Man nennt den Punkt, der um die Größe $\frac{p}{4}$ von dem Vertex auf der Axe gemessen absteht, den Brennpunkt der Parabel; und die Linien EN, NL, die von diesem Punkte aus nach irgend einem Punkte der Parabel gezogen werden, Radius Vector.

§. 13. Es ist Fig. 6. $EN^2 = EH^2 + HN^2 = \frac{p^2 Tang^2 A}{4} + \left(\frac{p}{4} - \frac{p \, Tang^2 A}{4}\right)^2 = \frac{p^2 Sec^4 A}{16}$, folglich $EN = \frac{p Sec^2 A}{4}$, das ist: der Radius Vector zu einem

Punkte

Punkte der Parabel ist gleich dem vierten Theile des zu diesem Punkte gehörigen Parameters, und es ist auch $NE = AN + AH = \frac{p}{4} + \frac{p\,Tang^2 A}{4}$.

§. 14. Da $AS = AH$ ist, so ist $NS = \frac{p}{4} + \frac{p\,Tang^2 A}{4}$ $= \frac{p\,Sec^2 A}{4} = EN$. Es ist demnach das Dreyeck ENS, das der Radius Vector, die Tangente und die Axe bilden, gleichschenklicht.

§. 15. Man ziehe $N\alpha$ senkrecht auf die Tangente, so halbiret sie den Winkel SNE, und die Tangente SE; es ist demnach:

$$E\alpha = \frac{p\,Sec\,A\,Tang\,A}{4},\ \alpha N = \frac{p\,Sec\,A}{4},$$

somit der Winkel $EN\alpha = \alpha NS = A$, folglich der Winkel SNE, den der Radius Vector mit der Axe macht $= 2A$ gleich dem doppelten generirenden Winkel.

§. 16. Da $\alpha N = \frac{p\,Sec\,A}{4}$ ist, so ist αN die mittlere Proportional-Linie zwischen AN und EN, das ist: der Perpendikel vom Brennpunkte auf die Tangente ist die mittlere Proportional-Linie zwischen dem Radius Vector und der Entfernung des Brennpunktes vom Vertex der Parabel.

§. 17. Da in den Dreyecken $A\alpha N$, αEN, zwey Winkel gleich, und die den gleichen Winkel einschliessenden Seiten in Verhältniß stehen, so sind diese Dreyecke

ähnlich;

ähnlich; folglich ist auch αAN ein rechter Winkel. Eine am Vertex der Parabel errichtete Perpendikular-Linie halbiret also die Tangente; und da $\alpha A = \frac{EH}{2} = \frac{p \text{ Tang} A}{4}$ ist, so ist diese Perpendikular-Linie gleich der halben rechtwinklichten Ordinate zum Punkte E.

§. 18. $A\alpha$, αE sind zwey Segmente von Tangenten, und zwar ist αA eine Tangente zum Vertex, αE eine Tangente zum Punkte E; $A\alpha = \frac{p \text{ Tang } A}{4}$;

$\alpha E = \frac{p. \text{ Sec } A. \text{ Tang } A}{4}$, es ist also

$(A\alpha)^2 : (\alpha E)^2 = \frac{p^2 \text{ Tang}^2 A}{16} : \frac{p^2 \text{ Sec}^2 A. \text{ Tang} A}{16} =$ $p : p \text{ Sec}^2 A.$

Wenn sich demnach zwey Tangenten schneiden, so verhalten sich die Quadrate ihrer Segmente wie die zu den Berührungs-Punkten gehörigen Parameter.

§. 19. Errichtet man im Punkte E auf der Tangente SE eine Perpendikular-Linie, und verlängert selbe, bis sie die Axe in Q schneidet, so nennt man selbe Normal-Linie, und es ist offenbar, daß selbe doppelt so groß als αN, und somit $= \frac{p \text{ Sec } A}{2}$ seyn müsse. Der Theil der Axe also, der zwischen der Ordinate EH, und der Normal-Linie fällt, ist also $HQ = \frac{p}{2}$, weil die eine Seite des rechtwinklichten Dreyeckes $= \frac{p \text{ Tang } A}{2}$, die

die andere $= \frac{p \text{Sec} A}{2}$ ist. Man nennt dieses Segment die Subnormal-Linie.

§. 20. Es ist $NE = AN + AH$, §. 13. $EO = AP - AH$, also $EN + EO = AN + AP$. Nimmt man demnach eine beliebige Abscisse AP, und errichtet PL senkrecht, ziehet dann EO parallel mit der Axe, und einen Radius Vector zum Punkte E, so ist immer der Radius Vector mehr der Parallele gleich, der Abscisse mehr dem vierten Theile des Parameters. Man mag den Punkt E nehmen, wo man will. Es ist also auch $NL = \frac{1}{4} p + AP$.

Note. Diese Eigenschaft der Parabel benützen die Mechaniker, um eine Parabel durch stäte Bewegung zu beschreiben.

§. 21. Der Winkel $\beta EO = \beta SP = 90 - A$. Es ist aber der Winkel $\alpha EN = 90 - \alpha NE = 90 - A$, also ist der Winkel $\beta EO = \alpha EN$. Strahlen, welche somit parallel mit der Axe auf die Tangente einfallen, werden in den Brennpunkt zurückgeworfen.

§. 22. Wir haben §. 7. die Gleichung einer geraden Linie LM gegeben, welche die Axe in einem beliebigen Punkte N unter was immer für einen Winkel schneidet. Wir haben gefunden, daß dieser Winkel das Complement des Generirenden sey. Diesem nach ist Fig. 6, wenn $AN = Z$ gesetzt wird:

$$DL = DM = \sqrt{p \text{Sec}^2 A. \left(z + \frac{p \text{Tang}^2 A}{4}\right)} = w.$$

Nun

Nun ist $DN = AF = \frac{p \, Sec\, A \; Tang\, A}{2}$,

also:

$NL = w + \frac{p\, Sec\, A\, Tang\, A}{2}$; $NM = w - \frac{p\, Sec\, A\, Tang\, A}{2}$.

Man errichte ND = NB rechtwinklicht auf dem Punkte N Fig. 7, so ist $DN^2 = p.AN = pz$. Es ist aber $LN. NM = w^2 - \frac{p^2 Sec^2 A. \, Tang^2 A}{2} = p\, Sec^2 A. z$. Also ist: $DN^2 : LN. NM = pz : pz Sec^2 A = p : p\, Sec^2 A = 1 : Sec^2 A$. Bleibt alles wie zuvor, und ändert sich nur durch der Durchschnitts-Winkel, so daß er statt $90° - A$, $90 - B$ werde, so ist:
$DN^2 : SN. NR = pz : p\, Sec^2 B. z = p : p\, Sec^2 B$.
Also $LN. NM : SN. NR = p\, Sec^2 A : p\, Sec^2 B$:

Wenn sich demnach zwey gerade Linien LM und SR in einem Punkte N der Axe der Parabel schneiden, so verhalten sich die Rektangel ihrer Segmente, wie die zu selben gehörigen Parameter; oder wie die Quadrate der mit diesen Linien parallelen Segmente der Tangente. Vid. §. 18.

§. 23. Es wachse AN um NZ = m, so ist $AZ = z + m$, und somit $ZX^2 = GZ^2 = p.(z + m)$; $ZT = m\, Cot\, A$; $NT = m\, Cosec\, A$. Folglich:

$$GT. TX = p. (z + m) - m^2 Cot^2 A.$$

Ferner:

$LT = LN - NT = w + \frac{p\, Sec\, A\, Tang\, A}{2} - m\, Cosec\, A$.

$MT = MN + NT = w - \frac{p\, Sec A. Tang A}{2} + m\, Cosec\, A$.

Also: MT. TL =

$$w^2 - \frac{p^2 Sec^2 A\ Tang^2 A}{4} + pm Sec^2 A - m^2 Cosec^2 A.$$

und da $w^2 = p Sec^2 Az + \frac{p^2 Sec^2 A.\ Tang^2 A}{4}$ ist, so ist

$$MT.\ TL = p Sec^2 A\ (z + m) - m^2 Cosec^2 A.$$

Folglich: $\frac{GT.\ TX}{p} : \frac{MT.\ TL}{p Sec^2 A} =$

$$(z + m - \frac{m^2.Cot^2 A}{p}) : (z + m - \frac{m^2 Cosec^2 A)}{p Sec^2 A} = 1 : 1;$$

oder: GT. TX: MT. TL = p : p Sec² A.

Ist demnach JU eine andere Chorde, welche die Chorde GX im Punkte T, die Axe aber unter einem Winkel TYZ = 90 — B schneidet, so ist auch:

$$GT.\ TX : JT.\ TU = p : p Sec^2 B.$$

Folglich:

$$MT.\ TL : JT.\ TU = p Sec^2 A : p Sec^2 B,$$

wie oben §. 22.

§. 24. Fällt der Durchschnitts-Punkt T außer der Parabel, so bleibt das Verhältniß dennoch immer dasselbe. Es sey Fig. 9. AN = z; NB = m, der Winkel TNB = 90 — A, so ist:

$$\frac{LM}{2} = \sqrt{p.Sec^2 A.\ (z + \frac{p\ Tang^2 A}{4})};$$

$$LN = \frac{LM}{2} + \frac{p\ Sec\ A\ Tang\ A}{2};$$

$$MN = \frac{LM}{2} - \frac{p\ Sec\ A\ Tang\ A}{2},$$

$$BC = \sqrt{p.(z + m)};\ BT = m\,Cot\ A.$$

TC

$$TC = m \operatorname{Cot} A - \sqrt{p.(z+m)};$$
$$TD = m \operatorname{Cot} A - \sqrt{p.(z+m)}, \text{ also:}$$
$$TD.\ TC = m^2 \operatorname{Cot}^2 A - p.(z+m).$$

Eben so ist; $TL = TN - NL =$

$$m \operatorname{Cosec} A - \sqrt{p \operatorname{Sec}^2 A.(z + \frac{p \operatorname{Tang}^2 A.}{4})} - \frac{p \operatorname{Sec} A \operatorname{Tang} A}{2.}$$

$$TM = TN + NM =$$

$$m \operatorname{Cosec} A + \sqrt{p \operatorname{Sec}^2 A.(z + \frac{p \operatorname{Tang}^2 A}{4})} - \frac{p \operatorname{Sec} A. \operatorname{Tang} A.}{2}$$

Also: $TM.\ TL =$

$$m^2 \operatorname{Cosec}^2 A - p \operatorname{Sec}^2 A\ (z + \frac{p \operatorname{Tang}^2 A}{4}) - p m \operatorname{Sec}^2 A$$

$$+ \frac{p^2 \operatorname{Sec}^2 A.\ \operatorname{Tang}^2 A}{4} = m^2 \operatorname{Cosec}^2 A - p \operatorname{Sec}^2 A.(z+m).$$

Folglich wie oben: $TD.\ TC = TM.\ TL = p : p \operatorname{Sec}^2 A.$

§. 25. Da $TM = TL + LM$ ist, so kann dieses Verhältniß auch folgender Maßen ausgedrückt werden.

$$TD.\ TC : TL.\ (TL + LM) = p : p \operatorname{Sec}^2 A.$$

Drehet sich die Linie TM um den Punkt T, so wird der Theil LM immer kleiner, und endlich null in J, wo diese Linie Tangente wird. Ist dann an diesem Punkte der Durchschnitts-Winkel der Tangente mit der Axe $= 90 - B$, so ist

$$TD.\ TC : TL^2 = p : p \operatorname{Sec}^2 B.$$

Folglich ist der Lehrsatz allgemein, daß, wenn sich zwey Chorden der Parabel in irgend einem Punkte in oder außer derselben schneiden, die Rektangel ihrer Segmente sich wie die diesen Chorden zugehörigen Parameter verhalten.

§. 26.

§. 26. Man betrachte eine rechtwinklichte Ordinate QB = b als Basis, Fig. 9. so ist: QA = $\frac{b^2}{p}$; GB sey = m, so ist QG = b — m. Folglich AW = $\frac{QG^2}{p}$ = $\frac{(b-m)^2}{p}$, und QW = QA — AW = $\frac{b^2}{p} - \frac{(b-m)^2}{p} = \frac{2bm - m^2}{p}$ = GS.

Man nehme AF = QA, so ist BT die Tangente zum Punkte B, §. 9. und es ist: QB: QT = BG: GU, oder b: $\frac{2b^2}{p}$ = m: GU = $\frac{2bm}{p}$.

Es ist also US = GU — GS = $\frac{m^2}{p}$, oder QB: BG = BG: US.

Wenn demnach auf der rechtwinklichten Ordinate BQ Abscissen genommen werden, die in arithmetischer Progression wachsen, so wachsen die Theile der mit der Axe parallelen Linien, welche zwischen der Parabel und der Tangente zum Punkte B fallen, wie die Quadrate der arithmethischen Proportional-Zahlen.

§. 27. Man theile QB in eine beliebige Anzahl kleiner Theile, als BC, CD ꝛc. und nenne einen solchen Theil n. Ziehe dann CJ, DL ꝛc. mit der Axe parallel, so ist, JH = $\frac{n^2}{p}$, KL = $\frac{4n^2}{p}$, MN = $\frac{9n^2}{p}$ OP = $\frac{16n^2}{p}$ ꝛc.

Man ziehe OR senkrecht auf die Basis, und mache AZ = AR, so ist OZ die Tangente zum Punkte O.

Nimmt

Nimmt man nun $GF = n$, somit $GB = 5n$, so ist $GS = \frac{10bn}{p} - \frac{25n^2}{p}$. Es ist aber $OR:RZ = OY:YX$; oder $b - 4n : 2.\frac{(b-4n)^2}{p} = n : YX =$ also $YX = \frac{2bn - 8n^2}{p}$; ferner $SY = SG - OF = \frac{(10bn - 25n)^2}{p} - \frac{(8bn - 16n)^2}{p} = \frac{2bn - 9n^2}{p}$, also ist: $SX = YX - SY = \frac{n^2}{p}$.

§. 28. Es wachse eine Ordinate EH, Fig. 6. um einen Theil $KC = n$. Man ziehe zum Punkte E die Tangente, und mit dieser eine Parallele zum Punkte C, dann EO parallel mit der Axe.

Ist nun $EH = y$, $AH = x$, so ist $AB = \frac{(y+n)^2}{p}$, folglich: $HB = EK = AB - AH = \frac{(y+n)^2}{p} - \frac{y^2}{p} = \frac{2yn + n^2}{p}$. Nun ist $CK:KF = EH:HS$, oder: $n : KF = y : \frac{2y^2}{p}$, also $KF = \frac{2yn}{p}$, folglich $EF = EK - KF = \frac{n^2}{p}$.

§. 29. Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte T eine Tangente zur Parabel zu ziehen. Fig. 8.

Auflösung. Da der Parameter $= p$, und der Punkt T, somit $AB = a$ und $BT = b$ gegeben sind,

so

so kommt es nur darauf an, den Winkel zu finden, den die gesuchte Tangente mit der Axe macht, oder den Winkel TKB zu finden; dieser ist aber das Complement des generirenden. Man nenne diesen generirenden wie immer A.

Da AB = a und der Parameter gegeben sind, so ist $BC = BD = \sqrt{ap}$ bekannt.

Es ist somit $TC = b - \sqrt{ap}$; $TD = b + \sqrt{ap}$.
Ferner: $TK = b \, Sec\, A$.
$KJ = \frac{p\, Sec\, A\, Tang A}{2}$, also $TJ = b Sec A - \frac{p Sec A . Tang A}{2}$.

Es ist aber §. 25.
$TD . TC : TJ^2 = p : p\, Sec^2 A = 1 : Sec^2 A$.
also:
$TJ = \sqrt{(b^2 - ap)} . Sec\, A = b\, Sec\, A - \frac{p\, Sec\, A\, Tang A}{2}$,

folglich:

$$Tang\, A = \frac{2b - 2\sqrt{b^2 - ap}}{p}.$$

§. 30. Aufgabe. Es ist der Winkel F, den die Vectoren BF und CF machen, gegeben, und es sind die beyden Vectoren selbst gegeben. Man soll die Parabel bestimmen. Fig. 10.

Auflösung. Es sey $BF = a$, $CF = b$. Die Aufgabe ist gelöset, wenn der Winkel BFA, der das doppelte des Generirenden zum Punkte B ist, bestimmt wird.

Es sey demnach der generirende Winkel A, der Winkel $BFC = B$, so ist: $a = \frac{\frac{1}{4} p}{Cos^2 A}$ und $b = \frac{\frac{1}{4} p}{Cos^2 A + \frac{B}{2}}$

 also

also $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\text{Cos}\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\text{Cos } A} = \text{Cos}\frac{B}{2} - \text{Sin}\frac{B}{2}\text{Tang } A$,

also $\text{Tang } A = \frac{\text{Cot}\frac{B}{2}\sqrt{b} - \text{Cosec}\frac{B}{2}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

§. 31. **Aufgabe.** Den zu einem Punkte G der Parabel coordinirten Radius der Krümmung zu finden.

Auflösung. Der Radius der Krümmung ist eine von den transzendentalen, aber ungeometrischen Größen, die wir, wie so manches andere ungeometrische Machwerk, dem Differential-Calcul verdanken. Um die Gleichung, welche dieser Calcul gibt, zu finden, verfahre man folgender Maßen.

Man ziehe (Fig. 11.) GR senkrecht auf die Axe, und Gw parallel mit selber. GS sey senkrecht auf der Tangente, so ist GS die Normal-Linie, RS die Subnormal-Linie, und GSA der generirende Winkel (§. 19), somit der Parameter zum Punkte G $= p\,\text{Sec}^2 A$.

Man ziehe ZX parallel mit der Tangente. Es sey GU $= x$, so wird $ZU^2 = p\,\text{Sec}^2 A.\,x$. Nun ist $GX = GU.\,\text{Cos } A$, also $\frac{ZU^2}{GX} = p\,\text{Sec}^3 A$. Dieses ist der auf den generirenden Winkel reducirte Ausdruck des Durchmessers des Krümmungs-Kreises. Will man ihn auf die Abscisse reduciren, so sey $AR = z = \frac{p\,\text{Tang}^2 A}{4}$, somit $\frac{ZU^2}{GX} = \frac{(4z + p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$. Eine Gleichung, die voll-

kom-

kommen mit jener identisch ist, welche der Differential-Calcul gibt.

§. 32. Aufgabe. Vorausgesetzt, daß der geworfene Körper eine Parabel beschreibt, den Elevations-Winkel TBQ des Geschützes bestimmen, wenn 1) der Gegenstand in der Horizontal-Linie Bδ, Fig. 9, 2) wenn der Gegenstand um den Winkel $\alpha B \gamma$ über den Horizonte erhaben ist.

Auflösung des ersten Falls.

Um dieses Problem aufzulösen, müssen folgende Stücke gegeben seyn. 1) Die Horizontal-Distanz des Gegenstandes oder $B\delta = d$. 2) Die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers nach der geraden Linie BT, (die hier die Tangente zum Punkte B ist,) und die man als gleichförmig annimmt. Sie sey $= BU = c$. 3) Der gleichzeitige Fall-Raum $US = f$.

Man nenne den unbekannten Parameter p, den Elevations-Winkel X. Dieser Winkel X ist der generirende. Es ist demnach $BG = c \operatorname{Cos} X$. Nun ist aber $US = f = \frac{BG^2}{p} = \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 X}{p}$, §. 26. Ferner:

$$AQ = \frac{QT}{2} = \frac{QB \operatorname{Tang} X}{2} = \frac{d}{4} \operatorname{Tang} X, \text{ also:}$$

$$p.AQ = \frac{pd}{4} \operatorname{Tang} X = \frac{d^2}{4} \text{ und } p = d \operatorname{Cot} X.$$

Man substituire in die Gleichung für f, so ist, wenn reduzirt wird:

$$\operatorname{Sin} 2 X = \frac{2fd}{c^2}.$$

Zwey-

Zweyter Fall. Es sey der Gegenstand in α. Der gegebene Winkel $\alpha B \gamma$ oder der Elevations-Winkel des Gegenstandes über dem Horizonte $= B$. Dieser Winkel B ist das Complement des Winkels, unter dem die Chorde αB die Axe QT schneidet, und ist somit der generirende Winkel für alle mit αB parallelen Chorden. Es sey also $\alpha B = d$; $A\beta = z$, so ist nach §. 7.

$$d = 2\sqrt{p\,\mathrm{Sec}^2 B.\ (z + \frac{p\,\mathrm{Tang}^2 B}{4})}.$$

Nun ist $AQ = \frac{p\,\mathrm{Tang}^2 X}{4}$; $QB = \frac{p\,\mathrm{Tang}\,X}{2}$, somit $Q\beta = \frac{p\,\mathrm{Tang}\,X}{2}.\ \mathrm{Tang}\,B$, und $A\beta = z = \frac{p\,\mathrm{Tang}^2 X}{4} - \frac{p\,\mathrm{Tang}\,X\,\mathrm{Tang}\,B}{4}$. Man substituire für z in der Gleichung für d, so wird:

$$d = 2\sqrt{\frac{p^2\,\mathrm{Sec}^2 B(\mathrm{Tang}^2 X - 2\,\mathrm{Tang}X\,\mathrm{Tang}B + \mathrm{Tang}^2 B)}{4}};$$

oder $d = p\,\mathrm{Sec}\,B\ (\mathrm{Tang}X - \mathrm{Tang}\,B)$.

Nun ist $p = \frac{c^2 \mathrm{Cos}^2 X}{f}$, also ist, wenn man substituirt und reduciret,

$$d = \frac{c^2}{f}.\,\mathrm{Sec}\,B.\ \left(\frac{\mathrm{Sin}\,2\,X}{2} - \mathrm{Tang}\,B.\ \frac{1 + \mathrm{Cos}\,2\,X}{2}\right).$$

Eine Gleichung, aus der man nach Belieben Sin 2 X, oder Cos 2 X entwickeln kann.

§. 33. Aufgabe. Beweisen, daß der geworfene Körper keine Parabel beschreibe.

Auflösung. Es sey Fig. 12. eine Parabel, deren Parameter = p. Man theile BC, die halbe Weite des horizontalen Wurfes in soviel gleiche kleine Theile, als man will, und es sey einer dieser Theile BD = DE ꝛc. = m.

In der Theorie des Wurfes betrachtet man die Stärke des schiefen Wurfes, welche durch das Segment BH der Tangente BF vorgestellet wird, als eine zusammengesetzte Kraft, und zerlegt selbe in eine Vertikale HD und in eine Horizontale BD. Diese, sagt man, ist beständig und gleichförmig. Jener wirckt in jedem Zeittheilchen die Schwere entgegen, und vermindert sie um die unveränderliche Größe $HJ = \frac{BD^2}{p} = \frac{m^2}{p}$. Von diesen zwey Kräften getrieben, beschreibt der Körper den Bogen BJ, den man als die Diagonale des Parallelograms BMHJ, wenn man HJ in Vergleichung mit BH als unendlich klein betrachtet, gelten läßt.

Ist der Körper in J angekommen, so würde er das Stück JK der Tangente zum Punkte J beschreiben, wenn nicht die Schwere ihn zu gleicher Zeit um den Raum KL = HJ herabdrückte. Der Körper beschreibe also eine Linie, welche die Eigenschaft hat, daß die Theile der mit der Axe parallelen und unter sich gleich entfernten Ordinaten, welche zwischen den Tangenten und der Curve fallen, einander gleich sind, also ist diese Curve eine Parabel, denn nur in dieser ist HJ = KL = NO = GA, wenn BD = DE ꝛc. ist.

So beweiset man, daß die Curve eine Parabel ist; allein dieses Raisonnement ist falsch. Damit eine Parabel beschrieben werde, ist es nicht genug, daß HJ, KL, NO

gleiche

gleiche Größen seyen. Es muß auch ein bestimmtes Verhältniß zwischen den Bogen BJ und der Tangente JK Statt haben. Nach obiger Theorie muß vermöge der Kraft der Trägheit, die Geschwindigkeit der 2ten Secunde, welche durch JK vorgestellt wird, dem Bogen BJ gleich seyn. In der Parabel ist aber JK kleiner, als die Sehne, folglich auch kleiner als der Bogen JB. Hier ist der Beweis.

Die Chorde $BJ = \sqrt{BD^2 + JD^2}$.

Es sey $BC = a$, $CF = b$, $BD = m$, so ist $HJ = \frac{m^2}{p}$, $DJ = \frac{am}{b} - \frac{m^2}{p}$;

folglich $BJ^2 = \frac{a^2m^2}{b^2} - \frac{2am^3}{bp} + \frac{m^4}{p^2}$.

Nun ist $SL = \frac{4m^2}{p}$; $KL = \frac{m^2}{p}$, $SK = \frac{3m^2}{p}$,

$ES = \frac{2am}{b}$; $KE = \frac{2am}{b} - \frac{3m^2}{p}$, also:

$KR = KE - DJ = \frac{am}{b} - \frac{2m^2}{p}$, und KR um $\frac{m^2}{p}$ kleiner als DJ.

Da nun $BD = DE = JR$ ist, so ist auch $JK = \sqrt{KR^2 + JR^2} < BJ = \sqrt{DJ^2 + BD^2}$. Da also JK, das proportionirte Segment der Tangente JG kleiner ist, als die Sehne BJ, so ist sie auch kleiner als der Bogen BJ. Dieser Unterschied gehöret nicht zu den Abweichungen, welche verschwinden, wenn man m sehr klein nimmt. Er wird desto größer, je kleiner man diese Größe annimmt.

§. 34. Aufgabe. Den Flächenraum einer Parabel zu finden.

Auf-

Auflösung. Man theile QB Fig. 9. in sehr viele kleine Theile, und es sey ein solcher Theil = m. Man ziehe die Tangente BT, und errichte in C, D, E ꝛc. Perpendikular-Linien, die man bis an die Tangente verlängert, so ist nach §. 27. $HJ = \frac{m^2}{p}$; $KL = \frac{4m^2}{p}$; $MN = \frac{9m^2}{p}$, $OP = \frac{16m^2}{p}$, $SU = \frac{25m^2}{p}$ ꝛc., und ist b die Zahl der m, welche in der Linie QB enthalten sind, so ist $AT = \frac{b^2m^2}{p}$. Wir haben somit folgende Reihe zu summiren, wenn wir den Flächenraum TASBU als die Summe sehr vieler und sehr kleiner Rhomben betrachtet, deren Basis die Linien HJ, KL, MN ꝛc., die Höhen die Linien BC, CD, DE ꝛc. sind; und da diese alle gleich m sind, so ist Flächenraum

$$TAXBU = m\left(\frac{m^2}{p} + \frac{4m^2}{p} + \frac{9m^2}{p} + \frac{16m^2}{p} + \ldots\ldots \frac{b^2m^2}{p}\right)$$

$$= \frac{m^3}{p}\left(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots\ldots b^2\right)$$

Nun lehrt die Algebra die Summe der Quadrate aller auf einander folgenden natürlichen Zahlen von 1 bis b finden, und es ist:

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \ldots\ldots b^2 = \frac{b.\ b + 1.\ 2b + 1}{2.\ 3} = \frac{2b^3 + 3b^2 + b}{2.\ 3};$$

also ist der Flächenraum $TASBU = \frac{(2b^3 + 3b^2 + b)}{2.\ 3}\frac{m^3}{p}$.

Es ist aber QB = bm, $QT = \frac{2b^2m^2}{p}$, folglich

das

das Dreyeck $QTB = \frac{QB.\ QT}{2} = \frac{b^2 m^2}{p}$;

also der parabolische Flächenraum

$$ASBQ = \triangle\ QTB - BSATU =$$

$$\frac{(6b^3 - 2b^3 - 3b^2 - b)}{2.\ 3}\ \frac{m^3}{p} = \frac{(4b^3 - 3b^2 - b)}{2.\ 3}\ \frac{m^3}{p}.$$

Man setze m gleich einer unendlich kleinen Einheit, so muß b eine sehr große Zahl seyn, und $3b^2 + b$ gegen $4b^3$ sehr unbeträchtlich seyn. Man lasse sie also weg, so ist:

der parabolische Flächenraum $ASBQ = \frac{2}{3}\frac{b^3}{p} = \frac{2}{3} AQ.QB$:

$$= \frac{2}{3}\ p^2\ \text{Tang}^3\ A.$$

Es ist hieraus offenbar, daß diese Berechnung der Fläche der Wahrheit desto näher kömmt, je kleiner man m nimmt; aber es wäre Unsinn, zu behaupten, daß die Rechnung dann genau zutreffe, wenn man m als ein Differential betrachtet, und $= 0$ setzet.

§. 35. **Aufgabe.** Den körperlichen Raum eines Paraboloides zu bestimmen.

Auflösung. Das Paraboloid entstehet durch die Umdrehung der Fläche ASBQ um die Axe AQ. Man theile AQ in so viele Theile, als man will, und WR sey ein solcher Theil $= n$. Bey der Umdrehung werden die zwey Ordinaten mit der dazwischen liegenden Fläche einen Cilinder bilden, dessen Höhe WR seyn wird; wenigstens wird dieser kleine Körper von einem Cilinder sehr wenig unterschieden seyn. Der Inhalt dieses Cilinders ist, wenn man π das bekannte Verhälten Diameters zum Umkreise nennt $= n.\ \frac{RO.^2\ \pi}{2}$.

Jede Ordinate beschreibt einen solchen Cilinder von der Höhe N. Die Summe aller dieser Cilinder gibt das Paraboloid.

Nun ist $RO^2 = p.AR$; also ist $RO^2 \frac{\pi}{2}.n = p.AR.n\frac{\pi}{2}$.

Es wachsen demnach diese kleinen Cilinder im Verhältnisse der coordinirten Abscissen, und da die Abscissen in arithmethischer Progression wachsen, so ist ihre Summe leicht zu bestimmen. Es sey S die Zahl, welche ausdrückt, wie viele Male WR in AQ enthalten ist; so ist die Summe aller kleinen Cilinder:

$$pn.\frac{\pi}{2}(1+2+3+4+5+\ldots.S) = \frac{S+1.S}{2}.pn\frac{\pi}{2}.$$

Man setze n gleich einer unendlich kleinen Einheit, so kann man S weglassen, weil, da S sehr groß ist, S gegen S^2 sehr klein ist. Man setzt demnach das Paraboloid $= \frac{S^2}{2}.p.n.\frac{\pi}{2}$, und da $pS = QA$, $pS = QB^2$ ist, so ist das Paraboloid $ASBQ = \frac{QB^2.QA}{2}.\frac{\pi}{2}.$

Nun ist der Conus $BTQ = \frac{2}{3} QB^2.AQ.\frac{\pi}{2}$,

also ist: das Paroboloid ASBQ: Conus BTQ = 3:4.

Note. Die Oberfläche des Paraboloids, und der Perimeter der Parabel sind durchaus incommensurable Größen, die eben so wenig durch den Differential-Calcul, als durch irgend eine andere Methode bestimmt werden können. Der Beweis dieses Satzes ist leicht, erfordert aber Kenntnisse im Differential- und Integral-Calcul, die hier nicht vorausgesetzt werden können.

Von

Von der Ellipse.

§. 1. Es sey Fig. 13 ein Kreis, dessen Radius $= a$. Man setze, alle Ordinaten desselben, wie ED; nähme im Verhältnisse von $b : a$ ab, die Abscissen CD blieben aber unverändert; so werden diese abgekürzten Ordinaten eine Ellipse bilden.

§. 2. Es sey in der Linie GF, $GA = a$, $AF = b$, und $b < a$. Man setze, GF bewege sich zwischen den Schenkeln des rechten Winkels GCF so, daß ihre End-Punkte G und F immer in den Schenkeln des Winkels bleiben; und der Punkt A während der Bewegung eine Curve beschreibe. Um die Gleichung dieser Curve zu finden, ziehe man die senkrechten AD, AH; der Winkel $FAD = AGH$ sey A; so ist $AD = b \operatorname{Cos} A$; $AH = CD = a \operatorname{Sin} A$. Nennt man AD, y; CD, x; so ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} . a^2 - x^2.$$

Dieses ist die Gleichung der Ellipse, die sich in die Gleichung des Kreises verwandlet, wenn man $a = b$ setzet.

§. 3. Da $y = b \operatorname{Cos} A$, $x = a \operatorname{Sin} A$ ist; so kann die Ordinate niemals größer werden als b, und die Abscisse nie größer als a seyn.

§. 4. Man setze $\operatorname{Cos} A = \frac{b}{a}$, so wird $y = \frac{b^2}{a}$; $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, also ist dann die Abscisse $= \sqrt{(AG + AF).(AG - AF)} = \sqrt{(CB + CK).(CB - CK)}$, die Ordinate $= \frac{AF^2}{AG} = \frac{CK^2}{CB}$.

Diese Ordinate, welche die dritte Proportional-Linie zu der halben großen Axe CB, und der halben kleinen Axe CK ist, nennt man den halben Parameter. Die mittlere Proportional-Linie zwischen der Summe und der Differenz beyder halben Axen nennt man die Excentrizität der Ellipse.

1te Note. Es ist einleuchtend, daß die Ellipse aus 4 gleichen Bögen bestehe; nämlich die Bögen KB und KR ober der Axe RB, und RZ, ZB unter selber. Betrachtet man in den beyden ersten die Ordinaten als positiv; so sind sie in den beyden anderen negativ. Die Abscissen des ersten und 4ten Bogens sind somit positiv. Die des 2ten und 3ten negativ. In dieser Rücksicht ist alles, wie bey dem Kreise.

2te Note. Ist $CO = CP = \sqrt{a^2 - b^2}$; so nennt man die Punkte O und P die Brennpunkte der Ellipse.

§. 5. Es sey dieses $CO = CP = \sqrt{a^2 - b^2} = d$; so ist $OD = CD - CO = a \operatorname{Sin} A - d$, $PD = CD + CP = a \operatorname{Sin} A + d$; also $AO = \sqrt{OD^2 + AD^2} = \sqrt{(a \operatorname{Sin} A - d)^2 + b^2 \operatorname{Cos}^2 A} = a - d \operatorname{Sin} A$. $PA = \sqrt{PD^2 + AD^2} = \sqrt{(a \operatorname{Sin} A + d)^2 + b^2 \operatorname{Cos}^2 A} = a + d \operatorname{Sin} A$, somit $OA + PA = 2a = RB$. Man nennt diese aus den Brennpunkten der Ellipse nach einem Punkte A derselben gezogenen Linien Vektoren. Ihre Summe ist demnach immer der großen Axe gleich.

§. 6. $CA = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2 A + b^2 \operatorname{Cos}^2 A} = \sqrt{a^2 - d^2 \operatorname{Cos}^2 A} =$

$\sqrt{(a}$

$\sqrt{(a + d \text{ Cos } A)\ (a - d \text{ Cos } A)}$. Man nehme $PL = a - d \text{ Cos } A$; so ist $OL = a + d \text{ Cos } A$, §. 5. folglich $CA = \sqrt{PL. OL}$.

§. 7. Man ziehe LM senkrecht auf CR. Es sey X der generirende Winkel zum Punkte L, so ist $ML = b \text{ Cos } X$, $MC = a \text{ Sin } X$, somit $MP = MC - PC = a \text{ Sin } X - d$, also $PL^2 = (a - d \text{ Cos } A)^2 = MP^2 + ML^2 = b^2 \text{ Cos}^2 X + (a \text{ Sin } X - d)^2$; reduzirt man; so findet man

$d^2 \text{ Sin}^2 X - 2 ad \text{ Sin } X = d^2 \text{ Cos}^2 A - 2 ad \text{ Cos } A$. Also $\text{Sin } X = \text{Cos } A$. Folglich $MC = a \text{ Cos } A$, $ML = b \text{ Sin } A$, und $CL^2 = MC^2 + ML^2 = a^2 \text{ Cos}^2 A + b^2 \text{ Sin}^2 A = a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A = (a + d \text{ Sin } A). (a - d \text{ Sin } A)$. Folglich $CL = \sqrt{OA. PA}$. §. 5.

Note. Es ist demnach der zum Punkte L gehörige generirende Winkel das Complement des generirenden im Punkte A.

§. 8. Da $a^2 - d^2 \text{ Cos}^2 A + a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A = 2a^2 - d^2 = a^2 + b^2$ ist; so ist: $CA^2 + CL^2 = CB^2 + CK^2$. Man nennt die Linien CA, CL coordinirte Diameter zum Punkte A. Die Summe ihrer Quadrate ist gleich der Summe der Quadrate der Axen.

1te Note. Die Diameter schneiden sich im Centrum C.

2te Note. Zwey Linien, die sich im Centrum schneiden, halbiren sich.

§. 9. Es ist somit: $\text{Sin ACD} = \frac{AD}{AC} = \frac{b \text{ Cos } A}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{Cos}^2 A}}$; $\text{Cos ACD} = \frac{a \text{ Sin } A}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{ Cos}^2 A}}$.

$\text{Sin LCM} = \frac{LM}{CL} = \frac{b \text{ Sin } A}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A}}$;

$\text{Cos LCM} = \frac{a \text{ Cos } A}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{ Cos}^2 A}}$; folglich:

$\text{Sin LCA} = \frac{a b}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A}.\ \sqrt{a^2 - d^2 \text{ Cos}^2 A}}$.

Somit LC. AC. Sin LCA = ab = CK. CB. Das ist: der Inhalt des Parallelograms aus den coordinirten Diametern ist gleich dem Rektangel der Axen.

§. 10. Zum Vertex B der Ellipse ziehe man eine Parallel-Linie mit dem Diameter EC, Fig. 14, und alles bleibe, wie zuvor, so kennt man im Dreyecke BCD, die Basis CB = a, den $\text{Sin DCB} = \frac{b \text{ Cos } A}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{Cos}^2 A}}$, den $\text{Sin DBC} = \text{Sin ECH} = \frac{b \text{ Sin } A}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{Sin}^2 A}}$, folglich kennt man $DB = \sqrt{a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A)}.\ \text{Cos } A.$ $CD = \sqrt{a^2 - d^2 \text{ Cos}^2 A)}.\ \text{Sin } A.$

Note. Wir werden in Zukunft den Diameter CA, f, CE, g nennen.

§. 11. Man ziehe LO parallel mit KB und EC. Es sey LN = z. CM = m sey gegeben. Man nenne B den Winkel DBC = LNC = ECH, und ziehe LP senkrecht auf die Axe, so hat man:

MN =

$MN = \frac{g \cos A.}{f \sin A} m$; $CN = \frac{am}{f \sin A}$; $LP = z \sin B =$ $z. \frac{b}{g} \sin A$; $PN = z \cos B = z. \frac{a}{g} \cos A$; $BP =$ $BC + PN - CN = a + z. \frac{a}{g} \cos A - \frac{am}{f \sin A.}$;

$RP = RC - PN + CN = a - z. \frac{a}{g} \cos A + \frac{am}{f \sin A.}$;

Da nun $LP^2 = \frac{b^2}{a^2}. BP. PR$ ist; so ist $z^2. \frac{b^2 \sin^2 A}{g^2} =$ $\frac{b^2}{a^2}. (a^2 - z^2. \frac{a^2}{g^2} \cos^2 A + \frac{2a^2 m \cos A.}{fg \sin A} z - \frac{a^2 m^2}{f^2 \sin^2 A.})$.

Oder, wenn man reduziret:

$$z^2 - \frac{2g \cos A\, m z}{f \sin A} = g^2 - \frac{g^2 m^2}{f^2 \sin^2 A} =$$

$$\frac{g^2}{{}^2 \sin^2 A} (f^2 \sin^2 A - m^2).$$

Man supplire das Quadrat, so wird:

$$z = \frac{gm \cos A}{f \sin A} \mp \frac{g}{f} \sqrt{(f^2 - m^2)}.$$

Es hat also z zwey Werthe von denen $\frac{2gm \cos A}{f \sin A} =$ 2MN die Differenz ist, nämlich einen positiven LN, und einen negativen NO. Es ist demnach MO = ML, und folglich theilt der Diameter CA alle mit dem Diameter EC parallelen Linien in 2. gleiche Theile, und es ist somit $ML = MO = \frac{g^2}{f} \sqrt{f^2 - m^2}$.

§. 12. Man setze CM = CA, das ist $m = f$, so wird $ML = 0$, folglich ist eine mit EC zum

Punkte

Punkte A gezogene Parallele AS eine Tangente zum Punkte A. Diese Tangente AS ist leicht zu bestimmen. Man setze in die Gleichung für MN, §. 11. $m = f$, so ist $AS = \frac{g \, Cos \, A}{Sin \, A}$. CN wird dann $CS = \frac{a}{Sin \, A}$ und ist die Secante, und da GS die Subtangente $= CS - CG$ ist; so ist $GS = \frac{a \, Cos^2 A}{Sin \, A}$.

§. 13. Da $CG = a \, Sin \, A$; $CB = a$; $CS = \frac{a}{Sin \, A}$ ist; so ist $CG : CB = CB : CS$, das ist: die halbe Axe ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der Abscisse und der Secante.

§. 14. Man verlängere die Tangente AS, bis sie die verlängerte kleine Axe in F durchschneidet; so kennt man im Dreyecke AFC alle drey Winkel und die Seite AC. Da nun der $Sin \, CFA = Cos \, ASC = Cos \, ECH = \frac{a}{g} Cos \, A$; $Sin \, FCA = Cos \, ACB = \frac{a}{f} Sin \, A$ ist; so ist $AF = g \frac{Sin \, A}{Cos \, A}$; folglich $AF . AS = g^2$; das ist: jeder Diameter EC ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der Tangente AS und der Cotangente AF, die mit ihm parallel sind.

§. 15. Nach §. 9. ist $Sin \, FAC = Sin \, ECA = \frac{ab}{fg}$, also ist $CF = \frac{b}{Cos \, A}$. Da nun $C\alpha = AG = b \, Cos \, A$, $CK = b$ ist; so ist CK, die halbe kleine Axe, die mittlere Proportional-Linie zwischen der Ordinate und der Cosecante.

§. 16. Nach §. 11: ist

$$LN = \frac{g}{f} \sqrt{(f^2 - m^2)} + \frac{g \, Cos \, A. \, m}{f \, Sin \, A.}$$

$$NO = \frac{g}{f} \sqrt{(f^2 - m^2)} - \frac{g \, Cos \, A. \, m}{f \, Sin \, A}$$ .. Also ist

$$LN. \, NO = \frac{g^2.}{f^2} \frac{(f^2 \, Sin^2 \, A - m^2).}{Sin^2 \, A}$$

Ferner ist $CN = \frac{am}{f Sin A.}$ §. 11.

Also $RN. \, NB = (a + \frac{am}{f Sin A}). \, (a - \frac{am}{f Sin A}) =$

$$\frac{a^2.}{f^2} \frac{(f^2 \, Sin^2 \, A - m^2)}{Sin^2 \, A.}$$

Somit $LN. \, NO: RN. \, NB = g^2 : a^2$.

Es sey WZ eine andere Linie, welche die Axe in N schneidet, auch diese muß ihre beyden coordinirten Diameter haben, wovon der eine mit ihr parallel ist, und der andere sie halbiret. Es sey dieser K, der andere L. Ferner sey in diesem Falle B der generirende Winkel dieser coordinirten Größen, und n die auf dem Diameter k genommene Abscisse, oder die Entfernung des Mittelpunktes dieser Linie vom Centrum, so ist:

$ZN. \, NW = \frac{l^2.}{k^2} \frac{(k^2 \, Sin^2 \, B - n^2)}{Sin^2 \, B.}$, und

$RN. \, NB = \frac{a^2.}{k^2} \frac{(k^2 \, Sin^2 \, B - n^2)}{Sin^2 \, B}$; also

$ZN. \, NW = a^2 : l^2$, folglich: $LN. NO : ZN. NW = g^2 : l^2$.

Wenn sich also zwey Lini[illegible] [illegible]m Axe schneiden; so verhalten [illegible]

mente, wie die Quadrate der mit selben parallelen Diameter.

§. 17. Es seyen wie zuvor Fig. 15, AC, LC die zum Winkel und Punkte A coordinirten Diameter. KD = DM eine mit EC parallele Ordinate, die Abscisse DC = m, so ist $KD = \frac{g}{f}.\sqrt{f^2 - m^2}$; $DE = \frac{g \, Cos A . m}{f \, Sin A}$.

Man nehme EF von beliebiger Größe, und es sey EF = n. Ist nun HF perpendikular auf F, und somit eine Ordinate der Axen; so ist:

$$HF^2 = FN^2 = \frac{b^2}{a^2}. RF. FB =$$

$$\frac{b^2}{a^2}. \left(a + \frac{am}{f Sin A} - n\right). \left(a - \frac{am}{f Sin A} + n\right) =$$

$$\frac{b^2}{a^2}. \left(a^2 - \frac{a^2 m^2}{f^2 Sin^2 A} + \frac{2amn}{f Sin A} - n^2\right).$$

Die Linien KM und HN schneiden sich in irgend einem Punkte G, der innerhalb oder außer der Ellipse seyn kann, und es ist:

$$FG = FE. Tang GEF =$$

$\frac{n. b Sin A}{a Cos A}$; $GE = FE. Sec GEF = \frac{ng}{a Cos A}$ somit

$$NG = NF + FG =$$

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 m^2}{f^2 Sin^2 A} + \frac{2amn}{f Sin A} - n^2)} + \frac{b Sin A. n}{a Cos A};$$

$$HG = FH - FG =$$

$$\frac{b}{a}. \sqrt{a^2 - \frac{a^2 m^2}{f^2 Sin^2 A} + \frac{2amn}{f Sin A} - n^2)} - \frac{b Sin A. n}{a Cos A};$$

also $NG. GH = \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 - \frac{a^2 m^2}{f^2 Sin^2 A} + \frac{2amn}{f Sin A} - n^2 Sec^2 A\right)$

Man

Man suche den Werth der Segmente KG und GM. Man findet:

$$KG = KD + DE - GE =$$

$$\frac{g}{f}\sqrt{(f^2 - m^2)} + \frac{g \operatorname{Cos} A.\ m}{f \operatorname{Sin} A} - \frac{gn}{a \operatorname{Cos} A};$$

$$MG = MD + GE - ED =$$

$$\frac{g}{f}\sqrt{(f^2 - m^2)} - \frac{g \operatorname{Cos} A.\ m}{f \operatorname{Sin} A} + \frac{gn}{a \operatorname{Cos} A}.$$

Also $KG.\ GM =$

$$\frac{g^2}{f^2}.(f^2 - m^2) - \frac{g^2 \operatorname{Cos}^2 A.\ m^2}{f^2 \operatorname{Sin}^2 A} + \frac{2g^2mn}{af \operatorname{Sin} A} - \frac{g^2n^2}{a^2 \operatorname{Cos}^2 A}.$$

Diese Aequation verwandelt sich durch sehr einfache Reduction in folgende:

$$KG.\ GM = \frac{g^2}{a^2}.(a^2 - \frac{a^2m^2}{f^2 \operatorname{Sin}^2 A} + \frac{2amn}{f \operatorname{Sin} A} - n^2 \operatorname{Sec}^2 A);$$

also ist $NG.\ GH : KG.\ GM = b : g^2$.

Wären p und q die coordinirten Diameter einer anderen mit q parallelen Ordinate, welche HN in G schneidet; so wäre $b^2 : q^2$, das Verhältniß des Rektangels ihrer Segmente zu dem Rektangel der Segmente GN, GH; also ist das Verhältniß des Rektangels jener Segmente, zu dem Rektangel der Segmente KG und GM der Linie KM, wie q^2, g^2 wie das Quadrat der mit ihnen parallelen Diameter.

Note. Es ist also mit diesem Verhältnisse wie bey der Parabel. Wir werden finden, daß selbes auch bey der Hyperbel Statt finde, und folglich ein allgemeines Verhältniß der Curven der zweyten Ordnung sey.

§. 18. Man bilde das Rektangel der Axen, und verlängere die Diagonale ZC, welche die Ellipse in U

schnei=

schneidet. Man ziehe WX parallel mit der großen Axe, und es sey $CT = p$; so ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ZCB, CTS; $CS = \frac{pb}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$TS = \frac{pa}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Man betrachte CS als eine Ordinate der Axen, und suche die coordinirte Abscisse SX, so findet man

$$SX^2 = \frac{a^2.(a^2+b^2)}{a^2+b^2} - \frac{p^2 a^2}{a^2+b^2}, \text{ also}$$

$$SX^2 + TS^2 = a^2.$$

Dieses ist das Verhältniß, das Euler durch den Differential-Calcul auf eine sehr mühsame Art fand, und das er äußerst merkwürdig nennt. Ich glaube bloß darum, weil er es fand. Sonst ist es nicht merkwürdiger, als so manche andere; und ich erinnere mich keiner praktischen Anwendung dieses Verhältnisses. Man kann es noch viel leichter durch den generirenden Winkel finden, und man sieht beym ersten Federzuge, daß, da nach dieser Methode $CS = b \operatorname{Cos} A$ ist, $TS = a \operatorname{Cos} A$ seyn müsse, und somit, da $SX = a \operatorname{Sin} A$ ist, $TS^2 + SX^2 = a^2$ sey.

§. 19. Wir wollen andere Verhältnisse berechnen, und sehen, ob wir nicht auch auf einige neue gerathen. Es sey ED eine Tangente, Fig. 16. und aus den Brennpunkten G und F die Vektoren zum Punkte A der Berührung, und FJ, GL perpendikular auf die Tangente. Man ziehe ferner die Perpendikular-Linie CK auf die Tangente, und es ist $CK = CA \operatorname{Sin} CAK = f. \frac{ab}{fg} = \frac{ba}{g}$, und wegen Aehnlichkeit der Dreyecke

DCK

DCK, DGL; $\frac{CK \cdot GD}{CD} = GL$ oder $\frac{\frac{ab}{g} \cdot \frac{a + d \, \text{Sin} \, A}{\text{Sin} \, A}}{\frac{a}{\text{Sin} \, A}}$

$$= b. \frac{a + d \, \text{Sin} \, A}{\sqrt{a^2 - d^2 \text{Sin}^2 A}} = b \frac{\sqrt{a + d \, \text{Sin} \, A}}{\sqrt{a - d \, \text{Sin} \, A}} = GL.$$

Eben so findet man $FJ = b \frac{\sqrt{a - d \, \text{Sin} \, A}}{\sqrt{a + d \, \text{Sin} \, A}}$, also $GL. FJ = b^2$, das ist, die kleine Axe ist die mittlere Proportional-Linie zu den Perpendikeln von den Brennpunkten auf die Tangente.

§. 20. Da $CF = d$, $FJ = b \frac{\sqrt{a - d \, \text{Sin} \, A}}{\sqrt{a + d \, \text{Sin} \, A}}$, und der Winkel $JFD = 90 - JDF$ im Dreyecke CFJ bekannt sind; so kennt man die Seite $CJ = a = CL$. Es liegen demnach alle Durchschnitts-Punkte der Tangenten und Perpendikular-Linien aus den Brennpunkten in einem Kreise vom Radius a, dessen C der Mittelpunkt ist.

§. 21. Man findet auch leicht die Gleichung für die Curve, welche durch die Durchschnitts-Punkte des Perpendikels aus dem Centrum und der Tangente beschrieben wird. Sie ist eine eigene in sich selbst zurückkehrende Linie der vierten Ordnung, die unseren Geometern noch ganz fremd ist.

§. 22. Aus diesen Verhältnissen lassen sich ungemein viele andere ableiten. Ich will nur einige anführen. Fig. 16.

Es

Es ist: $FD = \frac{a - d \sin A}{\sin A}$; $FA = a - d \sin A$;

$CD = \frac{a}{\sin A}$; $CL = a$, also ist $FD : TA = CD : CL$.

Ferner: $GD = \frac{a + d \sin A}{\sin A}$; $GA = a + d \sin A$;

$CD = \frac{a}{\sin A}$, $CJ = a$, also ist:

$$GD : GA = CD : CJ,$$

folglich sind CL und FA, GA und CJ parallel.

§. 23. Man verlängere FJ und GA, bis sie sich in P schneiden, so sind die Dreyecke CFJ, FGP ähnlich. Da nun $CF = d$; $FG = 2d$, und $CJ = a$ ist; so ist $GP = 2a$, und $PF = 2 FJ$.

§. 24. Es ist:

$$\sin FAJ = \frac{FJ}{FA} = \frac{b\sqrt{a - d \sin A}}{\sqrt{a + d \sin A} \cdot (a - d \sin A)} = \frac{b}{g}.$$

Eben so

$$\sin GAL = \frac{GL}{GA} = \frac{b\sqrt{a + d \sin A}}{\sqrt{a - d \sin A} \cdot (a + d \sin A)} = \frac{b}{g}.$$

Also sind die Winkel FAJ, GAL gleich. Die Winkel der Vektoren aus beyden Brenn-Punkten mit der Tangente sind im Berührungs-Punkte gleich. Der Strahl, der aus dem einen Brennpunkte auf den Berührungs-Punkt fällt, wird in den anderen Brennpunkt zurückgeworfen.

§. 25. Die Dreyecke GCQ, GFP sind einander ähnlich; denn sie haben einen gemeinschaftlichen Winkel in G; auch ist GP mit CJ, CK mit FJ parallel.

Es

Es ist demnach $GQ = a = QP$. Die Perpendikular-linie aus dem Centrum auf die Tangente, theilt also den größeren der beyden Vektoren in $GQ = a$, und $QA = d \text{ Sin } A$.

§. 26. Zieht man durch Q und J eine Linie; so ist sie mit der großen Axe parallel. Ich übergehe manche andere Verhältnisse; sie sind leichter zu finden, als zu schreiben.

§. 27. Man errichte AE, Fig. 17 senkrecht auf der Tangente im Berührungs-Punkte A, so ist AE oder der Theil dieser Perpendikular-Linie, der zwischen der Tangente und der großen Axe liegt, die Normal-Linie, der Theil der Axe ED, der zwischen dieser Normal-Linie und der rechtwinklichten Ordinate AD fällt, die Subnormal-Linie.

Der arithmetische Ausdruck dieser Linien ist leicht zu finden. Es ist nämlich $AE = AL. \text{ Tang } ALE = g. \frac{\text{Cos } A}{\text{Sin } A}. \frac{b \text{ Sin } A}{a \text{ Cos} A} = \frac{bg}{a} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A}$, und

$ED = AE. \text{Cos } AED = AE. \text{ Sin } ALE = \frac{b \text{ Sin } A}{g}. \frac{bg}{a} = \frac{b^2}{a} \text{ Sin } A$; gleich dem halben Parameter multiplizirt mit dem Sinus des generirenden Winkels.

§. 28. Aufgabe. Den Radius der Krümmung für den Punkt A zu finden.

Auflösung. Diese Größe ist gerade zu incommensurabel, und es ist leicht zu erweisen, daß der Durchmesser des Krümmungskreises nur im Kreise auf

der

der Tangente senkrecht stehen könne. Jene Gleichung, die man durch das Machwerk der Differential-Rechnung findet, kann ohne selber folgender Maßen gefunden werden.

Es sey PL die Tangente. CA = f der eine, MC = g der andere zum Punkte A coordinirte Diameter. Man ziehe die Ordinate KJ; GA sey x, so ist: $KG^2 = \frac{g^2}{f^2} \cdot (2fx - x^2)$. Vom Punkte G fälle man die Perpendikular-Linie $GF = x \text{ Sin } GAF = x \cdot \frac{ab}{fg}$ auf die Tangente. Mit dieser Größe dividire man das Quadrat von KG, von dessen Gleichung man x^2 wegläßt, um sich die Arbeit zu erleichtern, den Quotienten nennt man den Durchmesser des Krümmungs-Kreises, und findet somit

$$\text{Diametr. Curv.} = \frac{2g^3}{ab} = \frac{2(a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Note 1. Man kann den Ausdruck dieses angeblichen Diameters auf die Vectoren reduciren, dann ist $z = a - \text{Sin } A$, der eine Vector, so ist: $2a - z = a + d \text{ Sin } A$, der andere Vector, folglich

$$2az - z^2 = a^2 - d^2 \text{ Sin}^2 A \text{ ; und}$$

$$\text{Diam. Curv.} = \frac{2(2az - z^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Note 2. Oft wird gefordert, den Durchmesser der Krümmung durch den Perpendikel auf die Tangente und den Vector auszudrücken. Um dieses zu leisten, muß man sich erinneren, daß der Perpendikel vom Brennpunkte auf die Tangente $= \frac{b\sqrt{a - d \text{ Sin } A}}{\sqrt{a + d \text{ Sin } A}} = \frac{b\sqrt{z}}{\sqrt{2a - z}}$ sey. Man nenne selben P. Es ist demnach

P =

$P = \frac{b\sqrt{z}}{\sqrt{2a-z}} = \frac{bz}{\sqrt{2az-z^2)}}$, folglich $\sqrt{2az-z^2}$, $= \frac{bz}{P}$, und $(2az-z^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{b^3.z^3}{P^3}$,

also ist der Durchmesser der Krümmung $= \frac{2b^2}{a}.\frac{z^3}{P^3}$.

Man sieht hieraus, daß diese Größe nichts geometrisches an sich habe, als den Namen.

§. 29. Aufgabe. Drey zu einem Punkte A Fig. 17. coordinirte Größen sind gegeben. Man soll aus selben die unveränderlichen der Ellipse bestimmen.

Auflösung. Da wir alle zu einem Punkte coordinirten und mit diesem Punkte veränderlichen Größen durch Gleichungen gegeben haben, in denen keine Größe vorkömmt, als die große und die kleine Axe, und der generirende Winkel; so können, wenn 3 veränderliche Größen gegeben sind, zwey unbekannte eleminiret, und die dritte durch die gegebenen Größen bestimmt werden. Es sey z. B. gegeben der Vector $RA = r = a - d \,\mathrm{Sin}\, A$. Die Tangente $AL = t = g.\frac{\mathrm{Cos}\, A}{\mathrm{Sin}\, A} = \frac{\mathrm{Cos}\, A}{\mathrm{Sin}\, A}.\sqrt{a^2 - d^2 \,\mathrm{Sin}^2 A}$. Es sey endlich gegeben die Cotangente $AP = s = g\frac{\mathrm{Sin}\, A}{\mathrm{Cos} A} = \frac{\mathrm{Sin}\, A}{\mathrm{Cos} A}.\sqrt{a^2 - d^2 \,\mathrm{Sin}^2 A}$.

Man findet die große Axe oder 2a auf folgende Art.

$$AL.\ AP = CM^2 = a^2 - d^2 \,\mathrm{Sin}^2 A =$$
$$(a - d \,\mathrm{Sin}\, A).\ (a + d \,\mathrm{Sin} A) = r.\ a + d \,\mathrm{Sin} A.$$

Nun ist

$a + d \,\mathrm{Sin}\, A = 2a - r$, also: $ts = r.\ 2a - r$, folglich

$$2a = \frac{ts + r^2}{r}$$

§. 30.

§. 30. Aufgabe. Die Vectoren $US = m$ Fig. 17. $VS = n$, $ZS = r$, und die zwischen selben liegenden Winkel $USW = \alpha$, und $USZ = \beta$ sind gegeben. Man soll die unveränderlichen Größen der Ellipse bestimmen.

Auflösung. Es sey A der generirende Winkel für den Radius US, so ist $m = a - d \,\mathrm{Sin}\, A$. Man nenne X den Winkel, den US mit der Axe macht, so ist $\mathrm{Sin}\, X = \frac{UX}{SU} = \frac{b \,\mathrm{Cos}\, A}{a - d \,\mathrm{Sin}\, A}$; $\mathrm{Cos}\, X = \frac{SX}{SU} = \frac{a \,\mathrm{Sin}\, A - d}{a - d \,\mathrm{Sin}\, A}$.

Da nun $\mathrm{Sin}\, A = \frac{a - m}{d}$; so substituire man in der Gleichung für Cos X, und man findet:

$$m = \frac{a^2 - d^2}{a + d \,\mathrm{Cos}\, X} = \frac{b^2}{a + d \,\mathrm{Cos}\, X}.$$

Dadurch ist die Gleichung auf den Winkel reducirt, den der Radius Vector mit der Axe macht, der Winkel VSX ist gleich $X + \alpha$; der Winkel $ZSX = X + \beta$. Es ist demnach

$$n = \frac{b^2}{a + d \,\mathrm{Cos}\, X + \alpha}; \quad r = \frac{b^2}{a + d \,\mathrm{Cos}\, X + \beta};$$

und somit

$$\mathrm{Cos}\, X + \alpha = \frac{b^2 - an}{d} \qquad \mathrm{Cos}\, X + \beta = \frac{b^2 - ar}{d}$$

$$\mathrm{Cos}\, X = \frac{b^2 - am}{d}.$$

Man nenne p den Parameter der Ellipse $= \frac{b^2}{a}$, so ist $b^2 = ap$, also: $\mathrm{Cos}\, X + \alpha = \frac{a}{d}\, p - n$;

$\mathrm{Cos}\, X + \beta = \frac{a}{d}\, p - r$; $\mathrm{Cos}\, X = \frac{a}{d}\, p - m$.

Man

Man dividire jede der beyden ersten Gleichungen durch die dritte, so bekömmt man folgende zwey:

$$\text{Cos}\,\beta - \text{Tang X Sin}\,\beta = \frac{p-r}{p-m};$$

$$\text{Cos}\,\alpha - \text{Tang X Sin}\,\alpha = \frac{p-n}{p-m}$$

Eliminiret man Tang X aus diesen zwey Gleichungen; so wird

$$p = \frac{m.\ \text{Sin}\,(\alpha-\beta) + n\ \text{Sin}\,(\beta - r)\ \text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}\,(\alpha-\beta) + \text{Sin}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha.}$$

Man substituire für p in einer der obigen Gleichungen, so findet man Tang X, und somit den Winkel, den der Vector mit der Axe macht.

§. 31. **Aufgabe.** Den Flächenraum der Ellipse zu bestimmen.

Auflösung. Da der Flächenraum die Summe aller möglichen rechtwinklichten Ordinaten, und jede dieser Ordinaten im Verhältnisse von b: a kleiner als die Ordinate des Kreises ist, so muß auch der Flächenraum der Ellipse im Verhältnisse von b: a kleiner seyn; wenn demnach $\frac{a^2.\pi}{2}$ der Flächenraum des Kreises ist; so ist $\frac{ab.\pi}{2}$ der Flächenraum der Ellipse.

Note. Einer Ellipse Flächen-Inhalt ist also gleich dem Flächen-Inhalte eines Kreises, dessen Radius $= \sqrt{ab}$.

§. 32. **Aufgabe.** Den körperlichen Raum des Ellipsoides zu bestimmen.

Auflösung. Man theile die große Axe AC der Ellipse AB in eine sehr große Anzahl gleicher Theile,

wie eh. hl. (Fig. 18.) und betrachte einen solchen Theil als die Einheit, so wird der Flächenraum der Ellipse aus einer sehr grossen Anzahl von Rektangeln, wie efhi bestehen, deren Länge eine Ordinate des Kreises, deren Höhe die Einheit seyn wird. Der Augenschein zeiget, daß die Summe dieser Rektangel um etwas grösser oder um etwas kleiner seyn müsse, als die genaue Fläche der Ellipse, aber es ist zugleich offenbar, daß dieser Fehler desto kleiner werde, je kleiner man die gleichen Theile eh, hl nimmt.

Man setze, jeder dieser Theilungs-Rektangel drehe sich um die grosse Axe AC, so wird jeder einen kleinen Cilinder beschreiben, dessen körperlicher Inhalt $= (hi)^2 . \pi . (eh) = (\frac{b^2}{a^2} . 2ax - x^2) \pi . 1$ seyn wird.

Die Summe aller dieser Cilinder gibt den körperlichen Inhalt des Ellipsoids. Setzt man also AC $= a$, und nach und nach $x = 1 = 2 = 3 = a$, so bekömmt man folgende Reihe:

$$\pi . \left(\frac{2ab^2}{a^2} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + a) - \frac{b^2}{a^2} . (1 + 4 + 9 + 16 + 25 \ldots\ldots + a^2) \right)$$

Das erste Glied dieser zwey Reihen ist nun;

$$= \frac{b^2}{a^2} . (2a . \frac{a + 1 . a}{2}) = (a^3 + a^2) \frac{b^2}{a^2} = b^2 . (a + 1)$$

Das zweyte Glied:

$$= \frac{b^2}{a^2} . \frac{(a . a + 1 . 2a + 1)}{2 . 3} = \frac{b^2}{a^2} . \frac{2a^3 + 3a^2 + a}{6},$$

also ist die Differenz beyder Glieder $= \frac{b^2}{a^2} . \frac{4a^3 + 3a^2 - a}{6}$

Da

Da man nun die Theile eh, el ꝛc. als sehr klein betrachtet; so wird a die Summe dieser Theile eine sehr große Zahl seyn, und somit a^2 gegen a^3 unbeträchtlich. Man kann also ohne merklichen Fehler $\frac{3a^2 - a}{6}$, weglassen, und somit wird der körperliche Inhalt des Ellipsoids $\pi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4a^3}{6} = \frac{2}{3} \cdot ab^2 \cdot \pi$.

Es ist also derselbe ⅔ eines Cilinders, dessen Basis die kleine Axe, und dessen Höhe die große Axe ist.

Note. Durch diese Methode wird die Auflösung mehrerer für die Geographie wichtiger Aufgaben sehr leicht. Ich will nur einige dieser Aufgaben hier bemerken.

I. Eine Fläche berührt das Ellipsoid, auf dieser steht eine andere Fläche im Berührungs-Punkte senkrecht, so daß selbe das Ellipsoid schneidet, und mit dem Meridian rechte Winkel bildet. Man soll die große und die kleine Axe der Ellipse bestimmen, die durch den Schnitt entstehet.

II. Die unveränderlichen Dimensionen des Ellipsoids und eines Schnitts sind gegeben. Man verlangt die Dimisionen eines anderen Schnitts, der mit dem ersten einen bestimmten Winkel bildet. ꝛc. ꝛc.

Ich unterlasse diese Aufgaben hier aufzulösen, damit der Leser versuche, was die bisherigen Methoden zu leisten vermögen.

Von der Hyperbel.

§. 1. Man beschreibe eine Hyperbel auf die im ersten Abschnitte §. 9. gezeigte Art, und trage somit vom Punkte C auf der Linie QQ positive und negative Abscissen, so daß CD = a Sec A und — a Sec A sey. Zu jeder Abscisse errichte man eine rechtwinklichte positive Ordinate DF, und eine negative DX, beyde = ∓ b Tang A, so entstehen zwey coordinirte ähnliche und durchaus gleiche Curven, deren Vertex A von dem entgegengesetzten um AA = 2a abstehet. (Fig. 19.)

§. 2. Man errichte eine Perpendikular-Linie zum Punkte C auf der Linie AA, und nehme oberhalb und unterhalb die Abscisse CE = ∓ b Sec A, und zu jedem Punkte E zwey rechtwinklichte Ordinaten GE = ∓ a Tang A; so entstehen ebenfalls zwey coordinirte Hyperbeln, deren entgegengesetzte Vertex um 2CB = 2b von einander abstehen. Man nennt diese Distanzen der Vertex die Axen der Hyperbel.

1te Note. Es sind also bey der Hyperbel 4 coordinirte Curven zu betrachten, wovon je zwey und zwey gegenüberliegende einander ähnlich und gleich sind.

2te Note. Ist CA = CB, so sind alle vier coordinirten Hyperbeln einander ähnlich und gleich.

§. 3. Man verlängere die Ordinaten DF und EG (Fig. 19) links, bis sie sich in einem Punkte H schneiden, so ist: CA: CB = CD: DH, folglich DH = b Sec A. EH = a Sec A = CD, folglich FH = b (Sec A - Tang A), HG = a (Sec A — Tang A). Da nun Sec A — Tang A *niemals* null seyn kann, so kann auch die Linie CH nie-

mals die Hyperbel berühren. Diese unbestimmt verlängerte Linien CH, CZ 2c. nennt man die Assymptoten der Hyperbel.

§. 4. FZ ist demnach $b(\text{Sec }A + \text{Tang }A)$; $GW = a(\text{Sec }A + \text{Tang }A)$, also $FH.\ FZ = b.(\text{Sec }A - \text{Tang }A).\ b(\text{Sec }A + \text{Tang }A) = b^2$; und $HG.\ GW = a^2$.

§. 5. Da die Secanten und die Tangenten unbestimmt wachsen; so können auch die Schenkel der Hyperbel unbestimmt verlängert werden.

§. 6. Man ziehe FC und GC; da $CF^2 = CD^2 + FD^2$ ist; so ist $FC = \sqrt{a^2 \text{Sec}^2 A + b^2 \text{Tang}^2 A}$, und setzt man $a^2 + b^2 = d^2$, $FC = \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b^2}$). Eben so ist $GC = \sqrt{CE^2 + GE^2} = \sqrt{b^2 \text{Sec}^2 A + a^2 \text{Tang}^2 A}$, $= \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}$, also ist $FC^2 - GC^2 = a^2 - b^2$.

Die Differenz der Quadrate dieser zwey Linien ist also gleich der Differenz der Quadrate der beyden Axen.

§. 7. Man kennt $\text{Sin } FCD = \frac{FD}{FC} = \frac{b \text{ Tang } A}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b}}$;

$$\text{Cos } FCD = \frac{CD}{FC} = \frac{a \text{ Sec } A}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b^2}}$$

Eben so kennt man $\text{Sin } GCE = \frac{GE}{CG} = \frac{a \text{ Tang } A}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}}$;

$$\text{Cos } GCE = \frac{CE}{CG} = \frac{b \text{ Sec } A.}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}}$$

Man kennt also auch den Winkel $GCF = 90 - (FCD + GCE)$ und es ist $\text{Sin } GCF = \text{Cos } FCD + GCE = \frac{ab}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}).\ \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b^2}} = \frac{CB.\ CA.}{CG.\ CF}$

§. 8.

§. 8. Man ziehe FL mit GC; LG mit FC parallel, so ist das Parallelogram $LFGC = LF.FC. \text{Sin}\, GCF = ab$, gleich dem Rektangel der Axen.

Note. Da man im Parallelograme LFCG die Seiten $FC = \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b^2}$, die Seite $LF = \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}$ und den $\text{Sin}\, LFC = \frac{ab}{fg}$ kennt, so suche man die Diagonalen LC u. FG. Man findet $LC = d.(\text{Sec} A + \text{Tang}\, A)$; $FG = d\,(\text{Sec} A - \text{Tang}\, A)$, und somit $LC.FG = d^2$. Man vergleiche diese Note mit §. 27.

§. 9. Man verlängere die mit GC, parallele LF, bis sie die Axe in M schneidet; so sind die Dreyecke GCE und FDM ähnlich, denn es ist wegen der Parallelen der Winkel $GCE = DFM$, somit ist:

$$CE : CG = FD : FM, \text{ oder}$$

$b\, \text{Sec}\, A : \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2} = b\, \text{Tang}\, A : FM$, also:
$FM = \text{Sin}\, A. \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}$; ferner ist:

$$CE : EG = FD : DM, \text{ oder}$$

$b\, \text{Sec} A : a\, \text{Tang}\, A = b\, \text{Tang}\, A : DM$, also $DM = \frac{a\, \text{Sin}^2 A}{\text{Cos}\, A}$;
folglich $CM = CD - DM = a\, \text{Cos}\, A$.

§. 10. Man verlängere FM, bis diese Linie die Assymptote in S schneidet, so ist im Dreyecke MCS die die Linie CM, der Winkel $CMS = CGE$, und der Winkel MCS bekannt, und es ist:

$$MS = \frac{CM\ \text{Sin}\ MCS}{\text{Sin}(MCS + SMC)} = 1 - \text{Sin}\, A \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}$$

also ist $FS = FM + MS = \sqrt{d^2 \text{Sin}^2 A - a^2} = GC = LF$.

Note.

Note. Diesemnach theilt die Linie CF die zwischen den Assymptoten gezogene und alle mit selber parallelen Linien in zwey gleiche Theile. Eben so findet man, daß $G\rho = LG = CF$ sey, und daß somit die Linie CG die Linie $L\rho$ und alle mit selber parallelen Linien halbire. Der Kürze halber wird man die Linie $CF = f$, und $CG = g$ setzen.

§. 11. Es sey $CO = m$, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke CFM, CRO, $CM : MF \doteq CO : OR$, oder $a \operatorname{Cos} A : g \operatorname{Sin} A = m : OR$, also $OR = \frac{g}{a} . m \operatorname{Tang} A$, wenn PN mit FM parallel ist.

§. 12. Man ziehe PQ senkrecht auf die Axe. Es sey $PO = z$, so ist:

$PQ = z. \operatorname{Sin} POQ = z \operatorname{Sin} CGE = z. \frac{b}{g}$ [illegible] A.

Ferner ist $CQ = C\Theta + OQ = m + z \operatorname{Cos} POQ = (m + z.) \frac{a}{g} \operatorname{Tang} A$, also ist:

$$PQ^2 = \frac{b^2}{a^2} . ((m + z. \frac{a}{g} . \operatorname{Tang} A)^2 - a^2) = z^2 . \frac{b^2}{g^2} . \operatorname{Sec}^2 A;$$

aus dieser Gleichung entwickele man z, so findet man

$$z = \mp \frac{g}{a} . \sqrt{(m^2 \operatorname{Sec}^2 A - a^2)} + \frac{g}{a} . m \operatorname{Tang} A.$$

Es hat also z einen positiven Werth PO, und einen negativen ON, und da $\frac{g}{a} . m \operatorname{Tang} A = OR$ die Differenz dieser zwey Werthe ist, so ist $PR = RN$, und es theilt somit die verlängerte Linie CF alle mit GC parallelen Ordinaten in 2 gleiche Theile. Eben so theilt

CG

CG alle mit CF in der Neben-Hyperbel gezogenen Parallelen in zwey gleiche Theile. Man nennt sie darum conjugirte Diameter.

§. 13. Es sey $CR = x$, so ist $CM : CO = CF : CR$, oder $a \, Cos \, A : m = f : CR$, also $x = \frac{mf}{a} Sec \, A$, also

$\frac{a^2 x^2}{f^2} = m^2 Sec^2 A$. Substituirt man in der Gleichung

für $PR = \frac{g}{a} \sqrt{m^2 Sec^2 A - a^2}$; so wird $PR = \frac{g}{f} \sqrt{x^2 - f^2}$.

§. 14. Setzt man $x = f$, so wird $PR = 0$, und $RO = FM$, also ist FM die Tangente zum Punkte F, und ist §. 9 $= g. \, Sin \, A$.

§. 15. Es ist $CM = a \, Cos \, A$, $CA = a$, $CD = \frac{a}{Cos \, A}$, also ist CA die große Axe, die mittlere Proportional-Linie zwischen der Abscisse und der Secante, das ist, dem Segmente der Axe, das zwischen dem Mittelpunkte und der Tangente liegt.

§. 16. Aus §. 10 folgt auch, daß $RU = RT$, folglich $UP = NT$ sey.

§. 17. Es ist $CF : FS = CR : RT$, oder $f : g = \frac{f}{a} m \, Sec \, A : RT$, also $RT = \frac{g}{a} m \, Sec \, A$.

Da nun $RN = \frac{g}{a} \sqrt{m^2 Sec^2 A - a^2)}$ ist, so ist

$NT = \frac{g}{a} m \, Sec \, A - \frac{g}{a} \sqrt{m^2 Sec^2 A - a^2}$, und

$UN = \frac{g}{a} m \, Sec \, A + \frac{g}{a} \sqrt{m^2 Sec^2 A - a^2)}$, also

$UN . NT = g^2 = GC^2$. Wenn

Wenn also eine Parallele mit einem Diameter CG bis an die Assymptoten gezogen wird; so ist dieser Diameter die mittlere Proportional-Linie zwischen den Segmenten UN und NT.

§. 18. Man übertrage (Fig. 19) auf die rechte Seite, was auf der linken war, und zwar mit Beybehaltung derselben Buchstaben. Die schiefe Ordinate NP werde in γ durch eine Ordinate der Axen, das ist durch die auf CQ senkrechte Linie $\beta\delta$ durchschnitten. Es sey $O\alpha = n$ so ist $\alpha\gamma = n \text{ Tang } \alpha O\gamma = n \text{ Tang CGE} = \frac{n\,b}{a} \text{ Cosec A}$, und $O\gamma = n \text{ Sec } \alpha O\gamma = n \text{ Sec CGE} = \frac{n\,g}{a} \text{ Cot A}$. Es ist aber

$$P\gamma = PO - O\gamma =$$

$$\frac{g}{a}.\sqrt{(m^2 \text{Sec}^2 A - a^2)} + \frac{g}{a} m \text{ Tang A} - \frac{g}{a}.\, n \text{ Cot A}.$$

$$O\gamma = NO + O\gamma =$$

$$\frac{g}{a}.\sqrt{(m^2 \text{Sec}^2 A - a^2)} - \frac{g}{a}. m \text{ Tang A} + \frac{g}{a}. n \text{ Cot A}.$$ Also

$P\gamma.\ \gamma N = \frac{g^2}{a^2}.(m^2 + 2mn - a^2\ n^2 \text{ Cot}^2 A)$. Eben so ist:

$$\delta\gamma = \alpha\delta - \alpha\gamma = \frac{b}{a}\sqrt{((m+n)^2 - a^2)} - \frac{b}{a}. n \text{ Cosec A},$$

$$\beta\gamma = \beta\alpha + \alpha\gamma = \frac{b}{a}.\sqrt{((m+n)^2 - a^2)} + \frac{b}{a}. n \text{Cosec A},$$ folglich

$\beta\gamma.\ \delta\gamma = \frac{b^2}{a^2}.\ (m^2 + 2mn - a^2 - n^2 \text{Cot}^2 A)$, also ist:

$P\gamma.\ \gamma N : \beta\gamma.\ \delta\gamma = g^2 : b^2$, das ist, wenn sich zwey Ordinaten der Hyperbel in einem Punkte γ schneiden, so verhalten

halten sich die Rektangel ihrer Segmente wie die Quadrate der mit selben parallelen Diameter.

Note. Dieser Lehrsatz bleibt wahr, es mag der Durchschnitts-Punkt außer oder inner der Hyperbel, oder auch beyde schneidende Linien Tangenten seyn. Die Beweis-Art ist vollkommen dieselbe.

§ 19. Man mache (Fig. 20) $CP = CQ = CR = CS = d = \sqrt{a^2 + b^2}$, und suche die zu diesen Abscissen gehörigen Ordinaten, so findet man für die beyden horizontalen Hyperbeln die Ordinaten zu diesen Punkten $= \frac{b^2}{a}$, und für die zwey Verticalen die zugehörigen Ordinaten $= \frac{a^2}{b}$. Man nennt diese Ordinaten die Parameter der Hyperbeln; die Punkte P, Q, R, S die Brennpunkte derselben.

§. 20. Aus den Brennpunkten P, Q ziehe man zwey Vektoren nach einem Punkte H. Zieht man HG senkrecht auf die Axe CA; so ist $HG = b \text{ Tang } A$, $PG = CG - CP = a \text{ Sec } A - d$, folglich:

$HP = \sqrt{PG^2 + HG^2} = d \text{ Sec} A - a$. Eben so findet man:

$QH = \sqrt{QG^2 + HG^2} = \sqrt{(a \text{Sec} A + d)^2 + b^2 \text{ Tang}^2 A} = d \text{ Sec } A + a$. Also ist:

$QH - PH = 2a$, und $QH. PH = d^2 \text{ Sec}^2 A - a^2$.

Macht man $CL = b \text{ Sec } A$, und zieht die rechtwinklichte Ordinate $LK = a \text{ Tang } A$, dann auch die Vektoren RK, SK; so findet man $RK = d \text{ Sec} A - b$, $SK = d \text{ Sec } A + b$; folglich: $SK - RK = 2b$; $SK. RK = d^2 \text{Sec}^2 A - b^2$.

Es

Es ist demnach I. die Differenz zweyer Vektoren gleich der Axe, welche durch die Vertex gehet. Da ferner $CK = \sqrt{d^2 Sec^2 A - a^2}$, und $CH = \sqrt{d^2 Sec^2 A - b^2}$ coordinirte Diameter sind zu diesen Punkten §. 6. u. 12; so ist:

II. Das Produkt zweyer Vektoren gleich dem Quadrat desjenigen Diameters, den die beyden anderen einschließen.

§. 21. Es ist:

$$Sin\,HPG = \frac{HG}{HP} = \frac{b\,Tang\,A}{d\,Sec\,A - a};\quad Cos\,HPG = \frac{a\,Sec\,A - d}{d\,Sec\,A - a}$$

Nennt man also den Winkel APH, den der Radius Vector mit der Axe macht, φ, und den Radius Vector z; so läßt sich die Gleichung sehr leicht auf diese unbekannten und unveränderlichen Größen reduciren, und man findet:

$$z = \frac{d^2 - a^2}{a \mp d\,Cos\,\varphi} = \frac{b^2}{a \mp d\,Cos\,\varphi}.$$

Wenn also drey Vektoren und die zwischen selben am Brennpunkte liegenden Winkel gegeben sind, so kann man aus diesen drey Gleichungen die unveränderlichen Größen der Hyperbel bestimmen.

§. 22. Es sey HZ die Tangente zum Punkte H, so ist im Dreyecke ZHP; $ZH : ZP = Sin\,ZPH : Sin\,ZHP$, oder $g\,Sin\,A : d - a\,Cos\,A = \frac{b\,Tang\,A}{d\,Sec\,A - a} : Sin\,ZHG$.

Im Dreyecke QHZ ist $ZH : ZQ = Sin\,ZQH : Sin\,QHZ$. Oder: $g\,Sin\,A : d + a\,Cos\,A = \frac{b\,Tang\,A}{d\,Sec\,A + a} : Sin\,QZH$.

Da nun $\frac{d - a\,Cos\,A}{d\,Sec\,A - a} = \frac{d + a\,Cos\,A}{d\,Sec\,A + a}$ ist, so ist

$Sin\,ZHP = Sin\,QHZ = \frac{b}{g}$.

Es

wie eh, hl, (Fig. 18.) und betrachte einen solchen Theil als die Einheit, so wird der Flächenraum der Ellipse aus einer sehr großen Anzahl von Rektangeln, wie efhi bestehen, deren Länge eine Ordinate des Kreises, deren Höhe die Einheit seyn wird. Der Augenschein zeiget, daß die Summe dieser Rektangel um etwas größer oder um etwas kleiner seyn müsse, als die genaue Fläche der Ellipse, aber es ist zugleich offenbar, daß dieser Fehler desto kleiner werde, je kleiner man die gleichen Theile eh, hl nimmt.

Man setze, jeder dieser Theilungs-Rektangel drehe sich um die große Axe AC, so wird jeder einen kleinen Cilinder beschreiben, dessen körperlicher Inhalt $= (hi)^2 . \pi . (eh) = (\frac{b^2}{a^2} . 2a\,x - x^2)\,\pi . 1$ seyn wird.

Die Summe aller dieser Cilinder gibt den körperlichen Inhalt des Ellipsoids. Setzt man also AC $= a$, und nach und nach $x = 1 = 2 = 3 = a$, so bekömmt man folgende Reihe:

$$\pi . \left(\frac{2\,ab^2}{a^2} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + a) - \frac{b^2}{a^2} . (1 + 4 + 9 + 16 + 25 \ldots\ldots + a^2) \right)$$

Das erste Glied dieser zwey Reihen ist nun;

$$= \frac{b^2}{a^2} . (2a . \frac{a + 1 . a}{2}) = (a^3 + a^2) \frac{b^2}{a^2} = b^2 . (a + 1)$$

Das zweyte Glied:

$$= \frac{b^2}{a^2} . \frac{(a . a + 1 . 2a + 1)}{2 . 3} = \frac{b^2}{a^2} . \frac{2a^3 + 3a^2 + a}{6},$$

also ist die Differenz beyder Glieder $= \frac{b^2}{a^2} . \frac{4a^3 + 3a^2 - a}{6}$

Da

Da man nun die Theile eh, el ꝛc. als sehr klein betrachtet; so wird a die Summe dieser Theile eine sehr große Zahl seyn, und somit a^2 gegen a^3 unbeträchtlich. Man kann also ohne merklichen Fehler $\frac{3a^2 - a}{6}$, weglassen, und somit wird der körperliche Inhalt des Ellipsoids $\pi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4a^3}{6} = \frac{2}{3} \cdot ab^2 \cdot \pi$.

Es ist also derselbe ⅔ eines Cilinders, dessen Basis die kleine Axe, und dessen Höhe die große Axe ist.

Note. Durch diese Methode wird die Auflösung mehrerer für die Geographie wichtiger Aufgaben sehr leicht. Ich will nur einige dieser Aufgaben hier bemerken.

I. Eine Fläche berührt das Ellipsoid, auf dieser steht eine andere Fläche im Berührungs-Punkte senkrecht, so daß selbe das Ellipsoid schneidet, und mit dem Meridian rechte Winkel bildet. Man soll die große und die kleine Axe der Ellipse bestimmen, die durch den Schnitt entstehet.

II. Die unveränderlichen Dimensionen des Ellipsoids und eines Schnitts sind gegeben. Man verlangt die Dimisionen eines anderen Schnitts, der mit dem ersten einen bestimmten Winkel bildet. ꝛc. ꝛc.

Ich unterlasse diese Aufgaben hier aufzulösen, damit der Leser versuche, was die bisherigen Methoden zu leisten vermögen.

Von der Hyperbel.

§. 1. Man beschreibe eine Hyperbel auf die im ersten Abschnitte §. 9. gezeigte Art, und trage somit vom Punkte C auf der Linie QQ positive und negative Abscissen, so daß CD = a Sec A und — a Sec A sey. Zu jeder Abscisse errichte man eine rechtwinklichte positive Ordinate DF, und eine negative DX, beyde = ∓ b Tang A, so entstehen zwey coordinirte ähnliche und durchaus gleiche Curven, deren Vertex A von dem entgegengesetzten um AA = 2a absteher. (Fig. 19.)

§. 2. Man errichte eine Perpendikular-Linie zum Punkte C auf der Linie AA, und nehme oberhalb und unterhalb die Abscisse CE = ∓ b Sec A, und zu jedem Punkte E zwey rechtwinklichte Ordinaten GE = ∓ a Tang A; so entstehen ebenfalls zwey coordinirte Hyperbeln, deren entgegengesetzte Vertex um 2CB = 2b von einander abstehen. Man nennt diese Distanzen der Vertex die Axen der Hyperbel.

1te Note. Es sind also bey der Hyperbel 4 coordinirte Curven zu betrachten, wovon je zwey und zwey gegenüberliegende einander ähnlich und gleich sind.

2te Note. Ist CA = CB, so sind alle vier coordinirten Hyperbeln einander ähnlich und gleich.

§. 3. Man verlängere die Ordinaten DF und EG (Fig. 19) links, bis sie sich in einem Punkte H schneiden, so ist: CA : CB = CD : DH, folglich DH = b Sec A. EH = a Sec A = CD, folglich FH = b.(Sec A − Tang A), HG = a (Sec A — Tang A). Da nun Sec A — Tang A niemals null seyn kann, so kann auch die Linie CH nie-

mals

mals die Hyperbel berühren. Diese unbestimmt verlängerte Linien CH, CZ rc. nennt man die Assymptoten der Hyperbel.

§. 4. FZ ist demnach b (Sec A + Tang A); GW = a (Sec A + Tang A), also FH. FZ = b.(Sec A — Tang A). b (Sec A + Tang A) = b^2; und HG. GW = a^2.

§. 5. Da die Secanten und die Tangenten unbestimmt wachsen; so können auch die Schenkel der Hyperbel unbestimmt verlängert werden.

§. 6. Man ziehe FC und GC; da $CF^2 = CD^2 + FD^2$ ist; so ist $FC = \sqrt{a^2 \text{Sec}^2 A + b^2 \text{Tang}^2 A}$, und setzt man $a^2 + b^2 = d^2$, $FC = \sqrt{(d^2 \text{Sec}^2 A - b^2)}$. Eben so ist $GC = \sqrt{CE^2 + GE^2} = \sqrt{b^2 \text{Sec}^2 A + a^2 \text{Tang}^2 A} = \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}$, also ist $FC^2 - GC^2 = a^2 - b^2$.

Die Differenz der Quadrate dieser zwey Linien ist also gleich der Differenz der Quadrate der beyden Axen.

§. 7. Man kennt $\text{Sin FCD} = \frac{FD}{FC} = \frac{b \text{ Tang } A}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b}}$;

$$\text{Cos FCD} = \frac{CD}{FC} = \frac{a \text{ Sec } A}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b^2}}$$

Eben so kennt man $\text{Sin GCE} = \frac{GE}{CG} = \frac{a \text{ Tang } A}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}}$;

$$\text{Cos GCE} = \frac{CE}{CG} = \frac{b \text{ Sec } A.}{\sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - a^2}}$$

Man kennt also auch den Winkel GCF = 90 — (FCD + GCE) und es ist Sin GCF = Cos FCD + GCE = $\frac{ab}{\sqrt{(d^2 \text{Sec}^2 A - a^2)} . \sqrt{d^2 \text{Sec}^2 A - b^2}} = \frac{CB. CA.}{CG. CF}$

§. 8.

§. 8. Man ziehe FL mit GC; LG mit FC parallel, so ist das Parallelogram LFGC = LF. FC. Sin GCF = ab, gleich dem Rektangel der Axen.

Note. Da man im Parallelograme LFCG die Seiten $FC = \sqrt{d^2 Sec^2 A - b^2}$, die Seite $LF = \sqrt{d^2 Sec^2 A - a^2}$ und den $Sin\, LFC = \frac{ab}{fg}$ kennt, so suche man die Diagonalen LC u. FG. Man findet $LC = d. (Sec A + Tang A)$; $FG = d\ (Sec A - Tang A)$, und somit $LC. FG = d^2$. Man vergleiche diese Note mit §. 27.

§. 9. Man verlängere die mit GC parallele LF, bis sie die Axe in M schneidet; so sind die Dreyecke GCE und FDM ähnlich, denn es ist wegen der Parallelen der Winkel GCE = DFM, somit ist:

$$CE : CG = FD : FM, \text{ oder}$$

$b\, Sec\, A : \sqrt{d^2 Sec^2 A - a^2} = b\, Tang\, A : FM$, also: $FM = Sin\ A. \sqrt{d^2 Sec^2 A - a^2}$; ferner ist:

$$CE : EG = FD : DM, \text{ oder}$$

$b\, Sec A : a\, Tang A = b\, Tang A : DM$, also $DM = \frac{a\, Sin^2 A}{Cos\, A}$;

folglich $CM = CD - DM = a\ Cos\ A$.

§. 10. Man verlängere FM, bis diese Linie die Assymptote in S schneidet, so ist im Dreyecke MCS die die Linie CM, der Winkel CMS = CGE, und der Winkel MCS bekannt, und es ist:

$$MS = \frac{CM\ Sin\ MCS}{Sin(MCS + SMC)} = 1 - Sin A \sqrt{d^2 Sec^2 A - a^2}$$

also ist $FS = FM + MS = \sqrt{d^2 Sin^2 A - a^2} = GC = LF$.

Note.

Note. Diesemnach theilt die Linie CF die zwischen den Asymptoten gezogene und alle mit selber parallelen Linien in zwey gleiche Theile. Eben so findet man, daß $G\rho = LG = CF$ sey, und daß somit die Linie CG die Linie $L\rho$ und alle mit selber parallelen Linien halbire. Der Kürze halber wird man die Linie $CF = f$, und $CG = g$ setzen.

§. 11. Es sey $CO = m$, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke CFM, CRO, $CM : MF \doteq CO : OR$, oder $a \operatorname{Cos} A : g \operatorname{Sin} A = m : OR$, also $OR = \frac{g}{a} . m \operatorname{Tang} A$, wenn PN mit FM parallel ist.

§. 12. Man ziehe PQ senkrecht auf die Axe. Es sey $PO = z$, so ist:

$$PQ = z . \operatorname{Sin} POQ = z \operatorname{Sin} CGE = z . \frac{b}{g} \text{ [illegible] } A.$$

Ferner ist $CQ = C\Theta + OQ = m + z \operatorname{Cos} POQ = (m + z.) \frac{a}{g} \operatorname{Tang} A$, also ist:

$$PQ^2 = \frac{b^2}{a^2} . \left(\left(m + z . \frac{a}{g} . \operatorname{Tang} A \right)^2 - a^2 \right) = z^2 . \frac{b^2}{g^2} . \operatorname{Sec}^2 A ;$$

aus dieser Gleichung entwickele man z, so findet man

$$z = \mp \frac{g}{a} . \sqrt{m^2 \operatorname{Sec}^2 A - a^2)} + \frac{g}{a} . m \operatorname{Tang} A.$$

Es hat also z einen positiven Werth PO, und einen negativen ON, und da $\frac{g}{a} . m \operatorname{Tang} A = OR$ die Differenz dieser zwey Werthe ist, so ist $PR = RN$, und es theilt somit die verlängerte Linie CF alle mit GC parallelen Ordinaten in 2 gleiche Theile. Eben so theilt

CG

halten sich die Rektangel ihrer Segmente wie die Quadrate der mit selben parallelen Diameter.

Note. Dieser Lehrsatz bleibt wahr, es mag der Durchschnitts-Punkt außer oder inner der Hyperbel, oder auch beyde schneidende Linien Tangenten seyn. Die Beweis-Art ist vollkommen dieselbe.

§ 19. Man mache (Fig. 20) $CP = CQ = CR = CS = d = \sqrt{a^2 + b^2}$, und suche die zu diesen Abscissen gehörigen Ordinaten, so findet man für die beyden horizontalen Hyperbeln die Ordinaten zu diesen Punkten $= \frac{b^2}{a}$, und für die zwey Verticalen die zugehörigen Ordinaten $= \frac{a^2}{b}$. Man nennt diese Ordinaten die Parameter der Hyperbeln; die Punkte P, Q, R, S die Brennpunkte derselben.

§. 20. Aus den Brennpunkten P, Q ziehe man zwey Vektoren nach einem Punkte H. Zieht man HG senkrecht auf die Axe CA; so ist $HG = b \text{ Tang } A$, $PG = CG - CP = a \text{ Sec } A - d$, folglich:
$HP = \sqrt{PG^2 + HG^2} = d \text{ Sec} A - a$. Eben so findet man:
$QH = \sqrt{QG^2 + HG^2} = \sqrt{(a \text{Sec} A + d)^2 + b^2 \text{Tang}^2 A} = d \text{ Sec } A + a$. Also ist:
$QH - PH = 2a$, und $QH . PH = d^2 \text{Sec}^2 A - a^2$.

Macht man $CL = b \text{ Sec } A$, und zieht die rechtwinklichte Ordinate $LK = a \text{ Tang } A$, dann auch die Vektoren RK, SK; so findet man $RK = d \text{ Sec} A - b$, $SK = d \text{ Sec } A + b$; folglich: $SK - RK = 2b$; $SK . RK = d^2 \text{Sec}^2 A - b^2$.

Es

Es ist demnach I. die Differenz zweyer Vektoren gleich der Axe, welche durch die Vertex gehet. Da ferner $CK = \sqrt{d^2 Sec^2 A - a^2}$, und $CH = \sqrt{d^2 Sec^2 A - b^2}$ coordinirte Diameter sind zu diesen Punkten §. 6. u. 12; so ist:

II. Das Produkt zweyer Vektoren gleich dem Quadrat desjenigen Diameters, den die beyden anderen einschließen.

§. 21. Es ist:

$$Sin\, HPG = \frac{HG}{HP} = \frac{b\, Tang A}{d\, Sec A - a};\ Cos\, HPG = \frac{a\, Sec A - d}{d\, Sec A - a}$$

Nennt man also den Winkel APH, den der Radius Vector mit der Axe macht, φ, und den Radius Vector z; so läßt sich die Gleichung sehr leicht auf diese unbekannten und unveränderlichen Größen reduciren, und man findet:

$$z = \frac{d^2 - a^2}{a \mp d\, Cos\, \varphi} = \frac{b^2}{a \mp d\, Cos\, \varphi}.$$

Wenn also drey Vektoren und die zwischen selben am Brennpunkte liegenden Winkel gegeben sind, so kann man aus diesen drey Gleichungen die unveränderlichen Größen der Hyperbel bestimmen.

§. 22. Es sey HZ die Tangente zum Punkte H, so ist im Dreyecke ZHP; ZH: ZP = Sin ZPH : Sin ZHP, oder $g\, Sin\, A : d - a\, Cos\, A = \frac{b\, Tang\, A}{d\, Sec\, A - a} : Sin\, ZHG.$

Im Dreyecke QHZ ist ZH: ZQ = Sin ZQH : Sin QHZ. Oder: $g\, Sin\, A : d + a\, Cos\, A = \frac{b\, Tang\, A}{d\, Sec\, A + a} : Sin\, QZH.$

Da nun $\frac{d - a\, Cos\, A}{d\, Sec\, A - a} = \frac{d + a\, Cos\, A}{d\, Sec\, A + a}$ ist, so ist

$$Sin\, ZHP = Sin\, QHZ = \frac{b}{g}.$$

Es

Es theilt also die Tangente den Winkel, den die Vektoren machen, in zwey gleiche Theile.

§. 23. Die aus dem Brennpunkte P auf die Tangente gezogene Perpendikular-Linie $P\alpha = HP . \text{Sin } PH\alpha = \text{d Sec A} - a . \frac{b}{g} = b . \frac{\sqrt{\text{d Sec A} - a}}{\sqrt{\text{d Sec A} + a}}$. Eben so ist:

$Q\beta = QH . \text{Sin } QH\beta = \text{d Sec A} + a . \frac{b}{g} =$

$b \frac{\sqrt{\text{d Sec A} + a}}{\sqrt{\text{d Sec A} - a}}$, also $P\alpha . Q\beta = b^2$.

§. 24. Mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels $P\rho = m$ beschreibe man einen Kreis-Bogen, und ziehe von Q einen Radius Vector nach einem beliebigen Punkte δ der Hyperbel, so ist, wenn man A den generirenden Winkel zum Punkte δ nennt, $Q\delta = \text{d Sec A} - a$, $P\delta = \text{d Sec A} + a$, und $\gamma\delta = m - \text{d Sec A} - a$. Folglich $\gamma\delta + Q\delta = m - 2a = B\rho + BQ$, also ist die Summe dieser zwey Linien eine unveränderliche Größe, man mag den Punkt δ wo immer auf der Peripherie nehmen.

Note. Auf diesen Lehrsatz gründet sich die Methode, deren man sich bedient, um eine Hyperbel durch fortdaurende Bewegung zu beschreiben.

§. 25. Man errichte HF auf der Tangente in H senkrecht, so ist HF die Normal, GF die Subnormal-Linie, und es ist:

$$ZG : GH = ZH : HF, \text{ oder}$$

$a \frac{\text{Sin}^2 A}{\text{Cos A}} : b \text{ Tang A} = g \text{ Sin A} : HF$, also $HF = \frac{b . g}{a}$

ZG:

$ZG : GH = GH : GF$, oder

$\frac{a \operatorname{Sin}^2 A}{\operatorname{Cos} A} : b \operatorname{Tang} A = b \operatorname{Tang} A : GF$, also $GF = \frac{b^2}{a} . \operatorname{Sec} A$.

§. 26. Um das zu finden, was man den Durchmesser der Krümmung nennt, verfahre man wie bey der Ellipse.

Man findet auch hier: Rad. Curv. ad $H = \frac{CK^3}{ab} = \frac{g^3}{ab}$

und wenn z den Radius Vector, p den Perpendikel auf die Tangente bedeutet, und der Parameter $= P$ ist; so ist auch Rad. Curv. ad $H = \frac{P . z^3}{p^3}$. Diese Gleichung ist also sämmtlichen Kegelschnitten gemein; dieses wird niemanden wundern, der bey der Construkzion dieser Größe bemerkt, daß man x^2 weglieߟ, und somit die Krümmung der verschiedenen Kegelschnitte gleich setzte.

§. 27. Man verlängere die Ordinate MN bis an die Assymptote, so ist $NX = b (\operatorname{Sec} A - \operatorname{Tang} A)$. Man ziehe $BD = d$ und NY mit BD parallel, so sind die Dreyecke CUD, und NXY gleichschenklicht und ähnlich. Es ist somit $CD : DU = NX : XY$: oder $b : \frac{d}{2} = b . \operatorname{Sec} A - \operatorname{Tang} A : XY$, folich $XY = NY =$

$\frac{d}{2} . (\operatorname{Sec} A - \operatorname{Tang} A)$. Nun ist $CX = \sqrt{(CM^2 + MN^2)} = \frac{d}{2} \operatorname{Sec} A$; also $CY = \frac{d}{2} . \operatorname{Sec} A + \operatorname{Tang} A$.

Nennt man also CY, x, und NY, y, so ist:

$$CY . NY =$$

$$\frac{d}{2} (\operatorname{Sec} A + \operatorname{Tang} A) . \frac{d}{2} (\operatorname{Sec} A - \operatorname{Tang} A) = \frac{d^2}{4} = xy.$$

Man

Man nennt diese Gleichung die Gleichung der hyperbolischen Assymptoten.

§. 28. Es sey CD = CH = $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = d$. (Fig. 21.) Man mache CA $= d^{\frac{1}{3}}$, CB $= d^{\frac{2}{3}}$, so ist CD $= d^{\frac{3}{3}}$, ferner sey: CE $= d^{\frac{4}{3}}$, CF $= d^{\frac{5}{3}}$. CG $= d^{\frac{6}{3}}$, und so weiter, das ist: man nehme auf der Assymptote CX Abscissen, die in geometrischer Progression wachsen. Man ziehe mit der anderen Assymptote CZ die parallelen Ordinaten AU, BV ꝛc. so ist nach §. 27 AU $= d^{\frac{5}{3}}$: BV $= d^{\frac{4}{3}}$, DH $= d^{\frac{3}{3}}$. EJ $= d^{\frac{2}{3}}$, FK $= d^{\frac{1}{3}}$. und so weiter. Also stehen auch die Ordinaten in geometrischer Proportion.

Betrachtet man die Bogen der Curve HJ, JK, KL als Sehnen, so sind die Trapezien HDEJ, JEFK, ꝛc. alle einander gleich. Es bestehen nämlich dieselben aus den Parallelogramen MDEJ = NEFK, und dem Dreyecke HMJ = JNK, also sind sie gleich. Es ist nämlich das Parallelogram MDEJ = DE. EJ. Sin C. Nun ist DE = CE — CD $= d^{\frac{4}{3}} - d^{\frac{3}{3}} = d^{\frac{3}{3}} \cdot (d^{\frac{1}{3}} - 1)$; EJ $= d^{\frac{2}{3}}$, also DE. EJ. Sin C $= d^{\frac{5}{3}} (d^{\frac{1}{3}} - 1)$. Sin C.

Ferner ist das Dreyeck HMJ $= \frac{\text{MJ. MH. Sin C}}{2.}$ Nun ist MJ = DE $= d^{\frac{3}{3}} (d^{\frac{1}{3}} - 1)$; HM = HD - JE $= d^{\frac{3}{3}} - d^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}} (d^{\frac{1}{3}} - 1)$ also das Dreyeck HMJ $= \frac{\text{MJ. MH. Sin C}}{2} = \frac{d^{\frac{5}{3}} (d^{\frac{1}{3}} - 1)^2 \text{Sin C},}{2.}$ somit Parallogram MDEJ + △ HMJ $= d^{\frac{5}{3}} \left(\frac{d^{\frac{2}{3}} - 1}{2}\right)$ Sin C.

Ver-

Verfährt man auf dieselbe Art mit irgend einem von den übrigen Trapezien; so findet man überall dasselbe Resultat. Dieser Beweis kann aus folgender Betrachtung im Allgemeinen abgeleitet werden. Es sind nämlich Dreyecke und Parallelogramen einander gleich, wenn sich ihre Höhen wie umgekehrt ihre Basen verhalten. Nun ist nach der Construkzion der Natur der Hyperbel, und des geometrischen Verhältnisses der Abscissen und Ordinaten: $DE : EF = FK : EJ$, also $DE . EJ = EF . FK$. Eben so ist: $MJ : NK = NJ : MH$, also $MJ . MH = NJ . NK$. Also ist $HDFK = 2HDEJ$; $HDGL = 3HDEJ$, und so weiter. Es ist also unter dieser Voraussetzung $HDEJ$. die Potenz der Hyperbel; und $1 : d^{\frac{1}{3}}$, das Grund-Verhältniß dieses logarithmischen Systems.

Man sieht leicht, daß man CD so theilen könne, daß statt 3 Proportional-Theile 4, 5... n Theile zwischen C und D zu liegen kommen. In diesem Falle ändert sich das Grund-Verhältniß, und folglich auch die Potenz der Hyperbel. Gesetzt man habe n proportionirte Theile zwischen C und D genommen; so ist das Trapez $HDEJ = \frac{d^{\frac{2n-1}{n}} . (d^{\frac{2}{n}} - 1) . \text{Sin } C}{2}$. Hieraus ist offenbar, daß d^a Sin C nicht im allgemeinen die Potenz der Hyperbel einer bestimmten Hyperbel seyn könne.

Es ist noch überdieß zu bemerken, daß diese Gleichheit der zwischen den Ordinaten fallenden Räume nur in so fern Statt hat, als man die Bogen HJ, JK ꝛc. für gerade Linien nimmt. Da aber die Krümmung der Hy-

Hyperbel bey H grösser ist, als bey J, und so weiter; so ist der krumme Flächenraum HMJ kleiner als JNK, also kann durch diese Verhältnisse die Fläche der Hyperbel nicht quadrirt werden. Auch ist hier die Methode des unendlich kleinen oder der schneidenden Verhältnisse nicht anwendbar, denn wollte man CD in eine unendliche Menge von Proportional-Größen theilen, so würde $n = \infty$ somit das Trapez HDEJ =

$$\frac{d^{\frac{2\infty-1}{\infty}} \cdot (d^{\frac{2}{\infty}}-1). \text{ Sin C}}{2} = \frac{(d^2 - d^2) \text{ Sin C}}{2}$$

$$= \frac{0. \text{ Sin C.}}{2}$$

Verfährt man auf dieselbe Art mit irgend einem von den übrigen Trapezien; so findet man überall dasselbe Resultat. Dieser Beweis kann aus folgender Betrachtung im Allgemeinen abgeleitet werden. Es sind nämlich Dreyecke und Parallelogramen einander gleich, wenn sich ihre Höhen wie umgekehrt ihre Basen verhalten. Nun ist nach der Construkzion der Natur der Hyperbel, und des geometrischen Verhältnisses der Abscissen und Ordinaten: $DE : EF = FK : EJ$, also $DE . EJ = EF . FK$. Eben so ist: $MJ : NK = NJ : MH$, also $MJ . MH = NJ . NK$. Also ist $HDFK = 2HDEJ$; $HDGL = 3HDEJ$, und so weiter. Es ist also unter dieser Voraussetzung HDEJ die Potenz der Hyperbel; und $1 : d^{\frac{1}{3}}$, das Grund-Verhältniß dieses logarithmischen Systems.

Man sieht leicht, daß man CD so theilen könne, daß statt 3 Proportional-Theile 4, 5... n Theile zwischen C und D zu liegen kommen. In diesem Falle ändert sich das Grund-Verhältniß, und folglich auch die Potenz der Hyperbel. Gesetzt man habe n proportionirte Theile zwischen C und D genommen; so ist das

Trapez $HDEJ = \frac{d^{\frac{2n-1}{n}} . (d^{\frac{2}{n}} - 1). \text{Sin } C}{2}$. Hieraus

ist offenbar, daß d^a Sin C nicht im allgemeinen die Potenz der Hyperbel einer bestimmten Hyperbel seyn könne.

Es ist noch überdieß zu bemerken, daß diese Gleichheit der zwischen den Ordinaten fallenden Räume nur in so fern Statt hat, als man die Bogen HJ, JK ꝛc. für gerade Linien nimmt. Da aber die Krümmung der

Hy-

Hyperbel bey H grösser ist, als bey J, und so weiter; so ist der krumme Flächenraum HMJ kleiner als JNK, also kann durch diese Verhältnisse die Fläche der Hyperbel nicht quadrirt werden. Auch ist hier die Methode des unendlich kleinen oder der schneidenden Verhältnisse nicht anwendbar, denn wollte man CD in eine unendliche Menge von Proportional-Größen theilen, so würde n = ∞ somit das Trapez HDEJ =

$$\frac{d^{\frac{2\infty-1}{\infty}} \cdot (d^{\frac{2}{\infty}}-1) \cdot \text{Sin}\, C}{2} = \frac{(d^2 - d^2)\, \text{Sin}\, C}{2}$$

$$= \frac{0 \cdot \text{Sin}\, C}{2}.$$

Verbesserungen.

Seite	Zeile	statt	lies
12	14	DE	AE
— 23	— 29	— $7 \operatorname{Cos}^7 B$	— $\operatorname{Cos}^7 B$
— 25	— 23	— $\frac{e + e^{-z}}{2}$	— $\frac{e^z + e^{-z}}{2}$
— —	— 25	— $\frac{ez - e^{-z}}{2}$	— $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$
— 38	— 9	— x^{n-1}	— $(x-1)^n$
— 64	— 30	— $l. 1 + v$	— $l.(1+v)$
— 65	— 2	— $l. 1 + v$	— $l.(1+v)$
— 70	— 7	— verlegenen	— verwegenen
— 76	— 14	— $z\frac{dz}{dq}$	— $2.z\frac{dz}{dp}$
— —	— 15	— $z\frac{dz}{dp}$	— $2.z\frac{dz}{dp}$
— 105	— 13	— FGL	— GFL.
— —	— 27	— BCO	— SCO.
— 107	— 18	— $\operatorname{Tang} A + B$	— $\operatorname{Tang} \frac{A+B}{2}$
— 108	— 10	— Bogen AKD	Bogen AD
— 114	— 8	— AG	— AL
— 117	— 28	muß zwischen AB, AD, und AD, CD nur ein statt zwey Punkte stehen.	
— 131	passim	$\operatorname{Sin} B + X$	— $\operatorname{Sin}(B+X)$
		$\operatorname{Sin} G + X$	— $\operatorname{Sin}(G+X)$
— 132	— 4	— $\operatorname{Cot} x$	— $\operatorname{Cot} X$
— 133	— 1	— $(\operatorname{Sin} F + \operatorname{Cos} F) \operatorname{Tang} x$	$\operatorname{Sin} F + \operatorname{Cos} F. \operatorname{Tang} X$
— —	— 2	— $\operatorname{Sin}(G + C \operatorname{Cos} G + C) \operatorname{Tang} x$	$\operatorname{Sin}(G+C) + \operatorname{Cos}(G+C) \operatorname{Tang} X$

Seite	Zeile	statt	lies
133	3	Tang x	Tang X
—	11	Sin x	Sin X
—	12	Sin S — x	Sin S — X
—	13	$\frac{\text{Sin x}}{\text{Sin S} - \text{x}}$	$\frac{\text{Sin X}}{\text{Sin S} - \text{X}}$
—	14	Sin x	Sin X
—	15	Cot x	Cot X
—	17	Sin x	Sin X

Eodem muß b Sin F. Sin S in der Mitte stehen.

Seite	Zeile	statt	lies
—	30	Sin F + G + H : Sin F + G	Sin (F + G + H) : Sin (F + G)
134	1	Sin F + H + K	Sin (F + H + K)
—	2	$\frac{\text{Sin F + G. Sin F + H + K}}{\text{Sin F. Sin F + G + H}}$	$\frac{\text{Sin (F + G). Sin (F + H + K)}}{\text{Sin F. Sin (F + G + H)}}$
—	23	Sin B	b Sin B
—	24	— $\frac{\text{bc Sin B}}{\text{b}}$	$\frac{\text{bc Sin B}}{2}$.
146	2	BCD	BCG
—	3	DCA	GCA
148	2	Sin B	Sin β
—	10	Sin α Cos β : Sin β Cos α	Sin α Sin β : Cos α Cos β
157	8	$\frac{1 - \text{Cos A}}{2}$	$\frac{1 - \text{Cos } \alpha}{2}$
—	16	$\sqrt{\text{Cos } \frac{B+D+A}{2} . \text{Cos } \frac{B+D-A}{2}}$	$\sqrt{\text{Sin } \frac{B+D+A}{2} . \text{Sin } \frac{B+D-A}{2}}$
159	4	= Cos A	= Cos α
165	7	Tafeln 4, 5, 6,	Tafeln 6, 7, 8,

Seite	Zeile	statt	lies
169	16	der Punkt des Stabs	der Mittelpunkt des Stabs
— 170	— 28	— $x^2\ p^2$	— $x^2 - p^2$
— 172	— 4	ist BK^2 wegzulassen.	
— 180	— 4	— $pSec^2 Az$	— $pSec^2 A . Z$
— 181	— 2	— $\sqrt{p.(z+m)}$	$+\sqrt{p.(z+m)}$
— 182	— 6	— AF	— AT
— 192	— 15	— $pS = QA$	— $S = QA$
— 197	— 9	— $\frac{G^2}{^2 Sin^2 A}$	— $\frac{g^2}{f^2 Sin^2 A}$
— —	— 17	— $\frac{g^2 . \sqrt{f^2 - m^2}}{f}$	$\frac{g\sqrt{f^2 - m^2}}{f}$
— 199	— 21	— Diameter k	— Diameter K
— 200	— 5	— EC	— LC
— 204	— 3	— TA	— FA
— 206	— 20	— $a - Sin A$	— $a - d Sin A$
— 215	— 11	— wenn	— weil
— 222	— 2	— CH	— DH

Nachricht an den Buchbinder.

Das Blatt Seite 135 2c. wird ausgeschnitten, und zum Bogen J gebunden. Desgleichen geschieht bey dem Blatte Vorrede VII. Die Verbesserungen werden ans End gesetzt.

Bey Verleger gegenwärtigen Werkes sind fo[lgende]
Bücher zu haben.

Anleitung, gründliche, zur Rechenkunst für Anfänger; gegeben von J. W. J. P., dritte, mit neuen Zusätz[en ver]mehrte Aufl. 8. 785. 6 Gr. oder

Jaoobs, J. elementorum arithmeticae et algebra[e] calculi tum numerici tum literalis compendium[, edi]tio tertia, emendat. et aucta, 8. 98. 9 Gr. od.

— — Compendium elementorum geometriae e[t tri]gometriae, cum fig. Editio tertia, emend. et 8. 798. 9 Gr. od. 3

— — Dissertatio analytica, qua praecipue prop[rieta]tes linearum secundi ordinis, quas sectiones c[onicas] adpellare solemus, investigantur. 8. 98. 6 Gr. od.

Metz, A., Handbuch der Elementar-Arithmetik ver[bunden] mit der Elementar-Algebra für Anfänger. gr. 8 1 Thlr. 12 Gr. oder 2 fl.

— — sex argumenti mathematici dissertatione[s] maj. 99. 16 Gr. oder

Rabus, C., wohleingerichtetes Rechenbuch, worin alle [Rech]nungsarten durch die sogenannten Species in ganze[n und] gebrochenen Zahlen, deren praktische Prüfung durch di[e Re]gel de Tri und ihre mannichfaltige Anwendung auf ein[e] deutliche zum Theil noch nie gezeigte Lehrart vorge[tragen] wird. 2 Theile, 8. 20 Gr. oder 1 fl. r

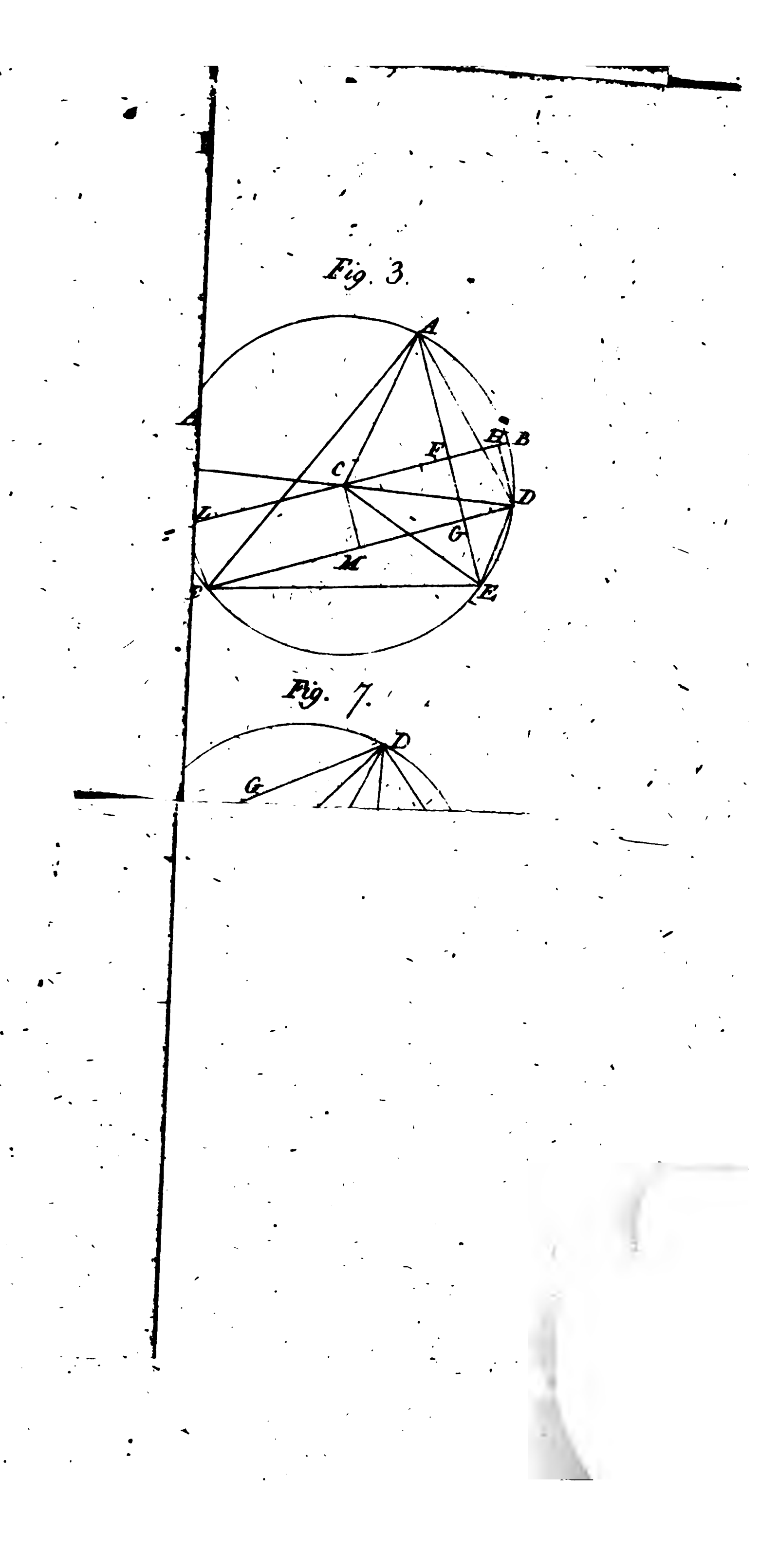
Rechenbuch, das Bamberger deutsche, enthaltend: di[e] Rechenkunst in ein neues Licht gesetzt, in 2 Th. 8. 20 Gr. oder 1 fl. 1

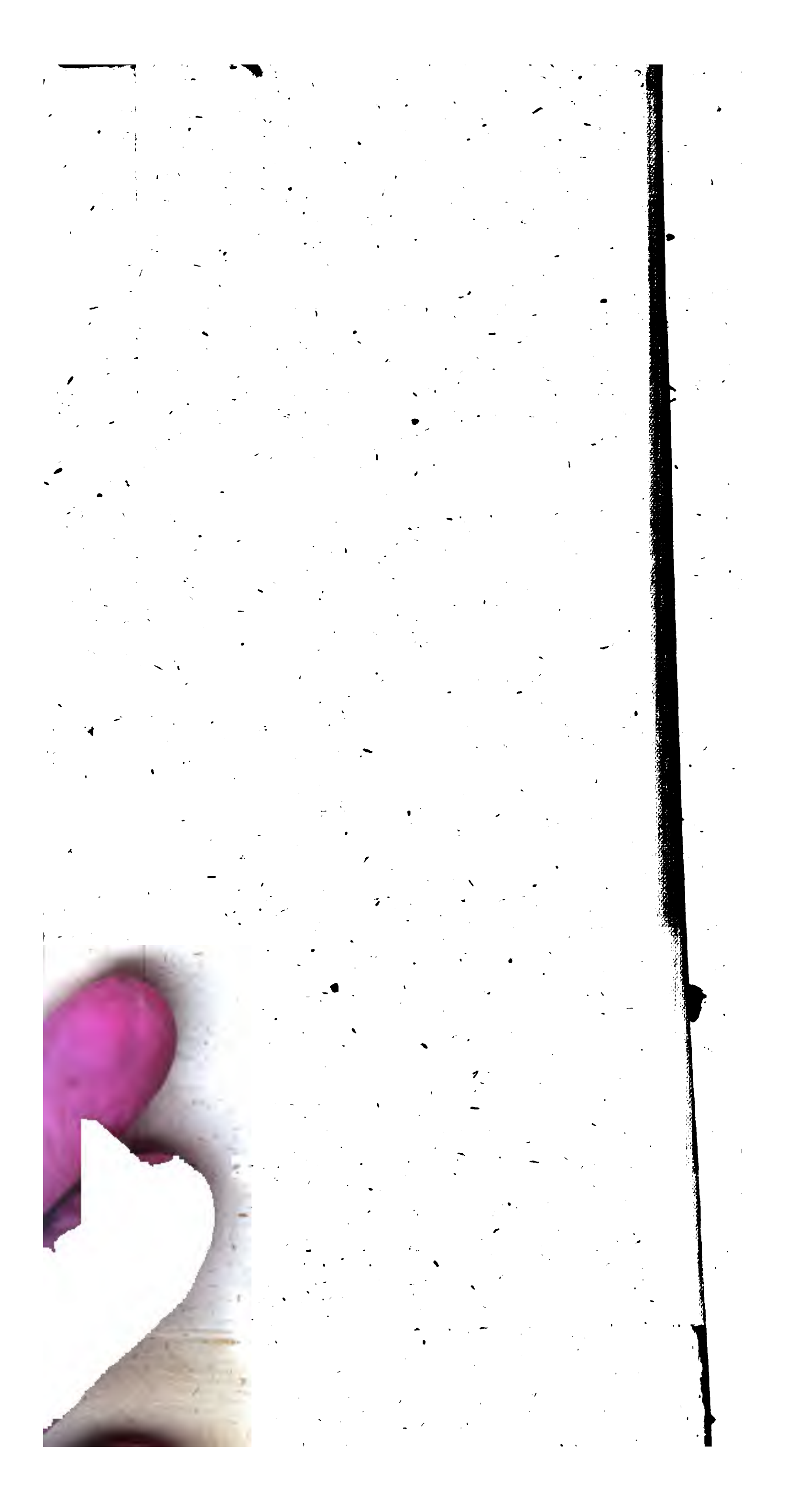
Reus, G., elementa arithmeticae, in usum scholar[um] 8. 85. 1 Rthlr. od. 1 fl. 30

Roppelt, J. P., introductio in mathesin, quarumcu[n]que scientiarum cultoribus accommodata, ad e[arum] quoque studium incitatoria, 8. maj. 12 Gr. od. 45

Schöns, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonomet[rie] gr. 8. 805. 2 Thlr. 4 Gr. oder 3 fl. 15


C
B

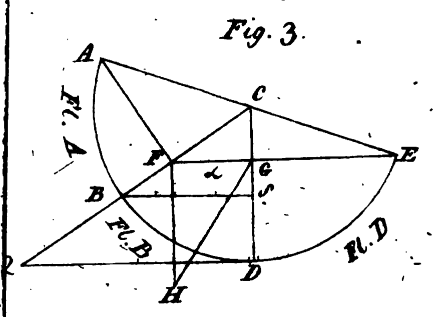

Fig. 3.
A
H
B
F
C
D
L
G
M
E
Fig. 7.
D
G

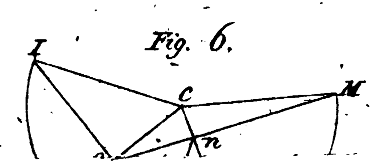






Tab







Tab. IV.

Fig. 8.

T

C

L

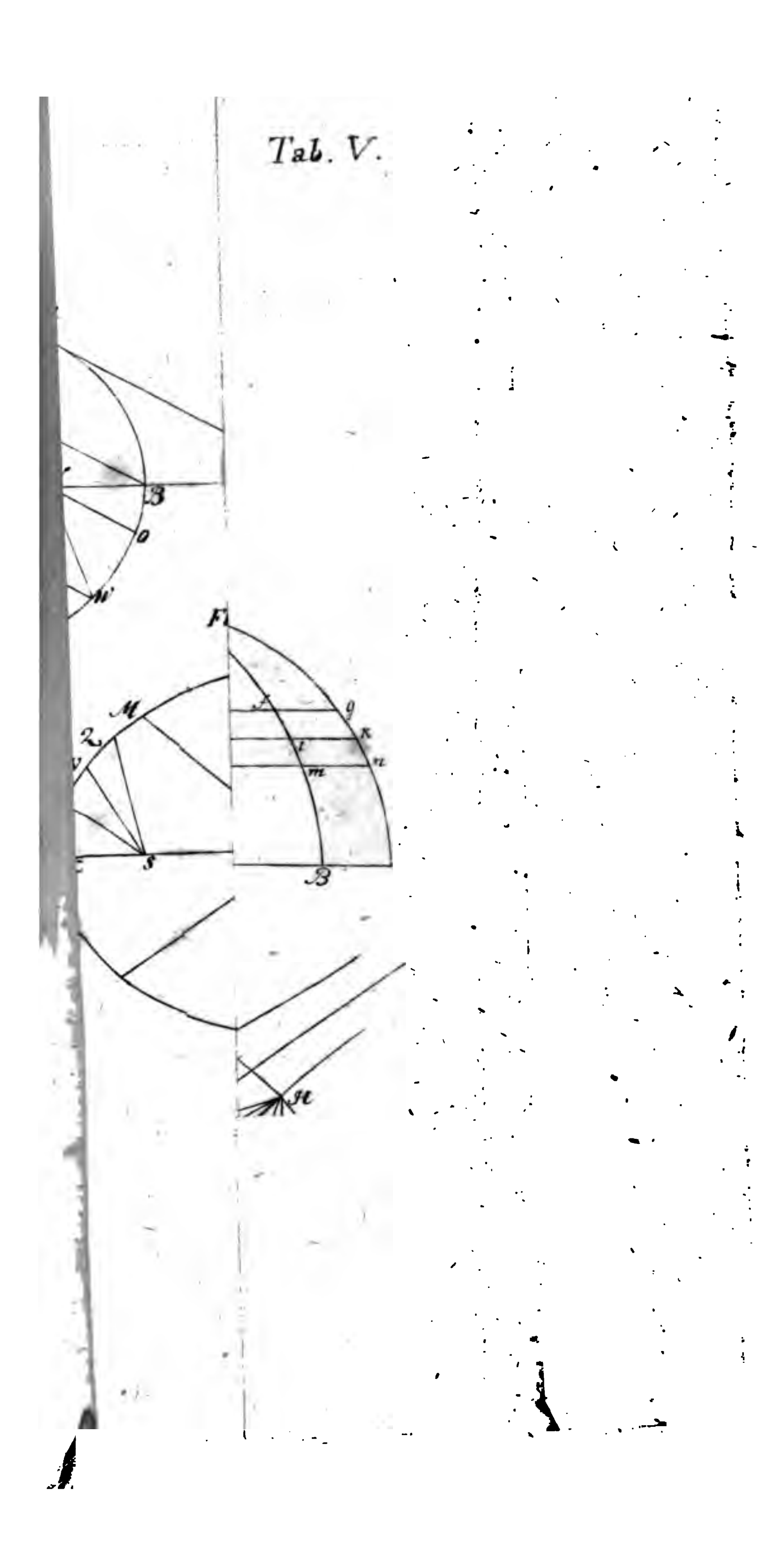
S

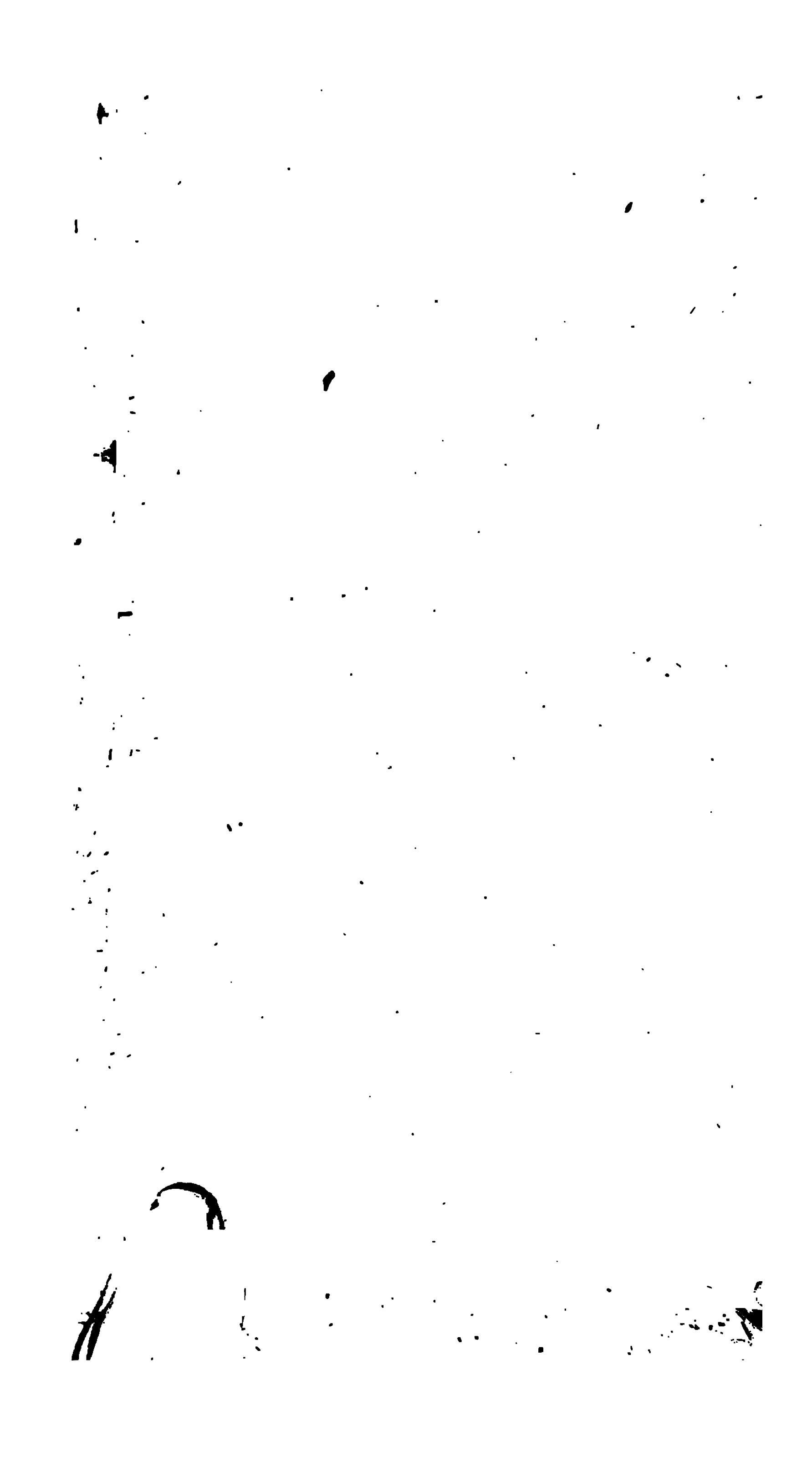
B

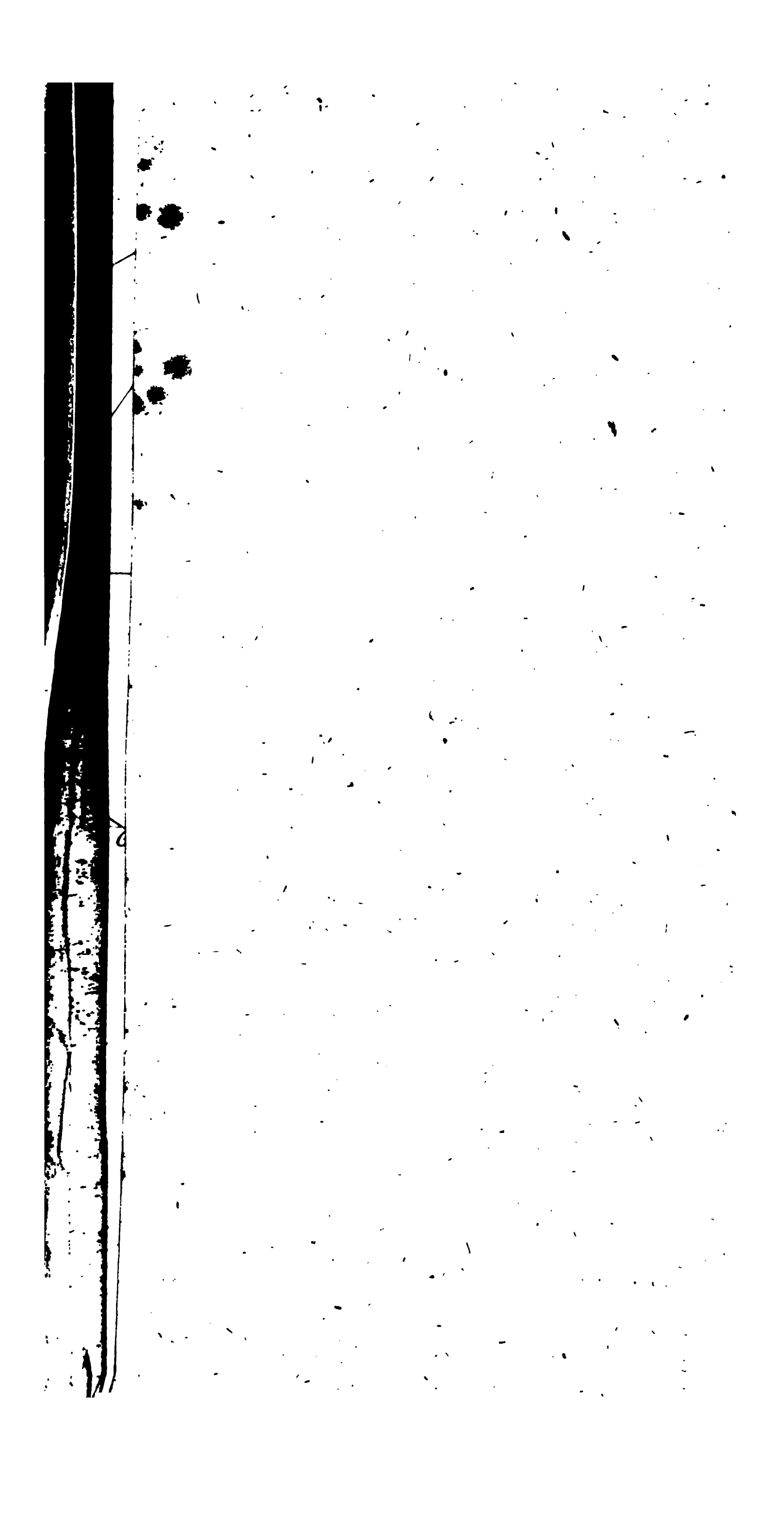
D

T




Tab. V.
B
o
N
F
M
2
f
g
k
l
n
m
S
B
H





Tab. VII.



Tab. VIII.

$\frac{HD}{HE}$

$\frac{HE}{HD}$

$= \frac{ab}{CH.}$

$= \frac{d\,Sec\,A\,Tang\,A}{CI.\;CH.}$

$= OHD\,\frac{b}{CI}$

$= GTX = \frac{a}{CH}$

T

$ecA + Tang\,A)$

$SecA - Tang\,A)$

CI

Sec A

parallel mit

ist.

$(SecA - TangA)$

$SecA + Tang\,A)$

